COGNOME .... *NOME* ....

Inserire le risposte negli spazi predisposti, *accompagnandole con spiegazioni* chiare ed essenziali. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Ogni esercizio vale 7.5 punti.

1. Siano dati i numeri complessi $z = 2 + 2i$ e $w = 2i$.
   (a) Scrivere $2z^2 + 1/w$ e $z^{-1} + \overline{w}$ nella forma $a + bi$ con $a, b \in \mathbf{R}$.
   (b) Calcolare la parte reale "Re" e la parte immaginaria "Im" di z^{-1} e di $\overline{w}^2$.
   (c) Calcolare $\mathrm{Arg}(zw)$ e $\mathrm{Arg}(z^2)$.

   (a) Abbiamo che $2z^2 = 2(2+2i)^2 = 16i$ e $1/w = 1/2i = -\frac{1}{2}i$. Allora $2z^2 + 1/w = 16i - \frac{1}{2}i = \frac{31}{2}i$. Similmente, abbiamo che $z^{-1} = \frac{1}{2+2i} = \frac{2-2i}{(2+2i)(2-2i)} = \frac{2-2i}{8} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$ e $\overline{w} = -2i$. Allora $z^{-1} + \overline{w} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i - 2i = \frac{1}{4} - \frac{9}{4}i$.
   (b) Nella parte (a) abbiamo calcolato $z^{-1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}i$. La parte reale è $\frac{1}{4}$, mentre la parte immaginaria è $-\frac{1}{4}$. Similmente, abbiamo che $\overline{w}^2 = (-2i)^2 = -4$ con parte reale -4 e parte immaginaria uguale a zero.
   (c) Abbiamo che $\mathrm{Arg}(z) = \frac{\pi}{4}$ e $\mathrm{Arg}(w) = \frac{\pi}{2}$. Concludiamo che $\mathrm{Arg}(zw) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$ e $\mathrm{Arg}(z^2) = 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

2. (**Solo per studenti di ingegneria Medica**). Sia $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Calcolare A^{100}.

Sia $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ la moltiplicazione per A. Allora la matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica è A. Usiamo adesso una base di autovettori di f. Il polinomio caratteristico di f è uguale a $(-1-\lambda)(5-\lambda) + 8 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 3)(\lambda - 1)$. Un autovettore di autovalore $\lambda = 1$ è $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Un autovettore di autovalore $\lambda = 3$ è $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Rispetto alla base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ la matrice rappresentativa di f è uguale a $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Adesso consideriamo i due diagrammi commutativi

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbf{R}^3 \\ {\scriptstyle \mathrm{id}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\ \mathbf{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbf{R}^3 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \xrightarrow{A'} & \mathbf{R}^3 \\ B\downarrow & & \downarrow B \\ \mathbf{R}^3 & \xrightarrow{A} & \mathbf{R}^3 \end{array}$$

Nella parte superiore del diagramma usiamo la base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ di autovettori di f. Nella parte inferiore usiamo invece la base canonica di $\mathbf{R}^2$. Le colonne della matrice B sono formate dalle coordinate degli autovettori di f calcolate rispetto alla base canonica. Abbiamo che $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ e $BA' = AB$. Nello stesso modo abbiamo due diagrammi commutatitivi per l'applicazione f^{100}.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \xrightarrow{f^{100}} & \mathbf{R}^3 \\ {\scriptstyle \mathrm{id}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} \\ \mathbf{R}^3 & \xrightarrow{f^{100}} & \mathbf{R}^3 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \xrightarrow{A'^{100}} & \mathbf{R}^3 \\ B\downarrow & & \downarrow B \\ \mathbf{R}^3 & \xrightarrow{A^{100}} & \mathbf{R}^3 \end{array}$$

e quindi $BA'^{100} = A^{100}B$. Siccome la matrice inversa di B è uguale a $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, abbiamo che

$$A^{100} = BA'^{100}B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 3^{100} & 2 - 2\cdot 3^{100} \\ -1 + 3^{100} & -1 + 2\cdot 3^{100} \end{pmatrix}.$$

3. Sia $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione data da $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

   (a) Calcolare $\ker(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$.
   (b) Calcolare autovalori e autospazi di f.
   (c) Determinare, se esiste, l'applicazione inversa f^{-1}.

   (a) Siccome $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ se e soltanto se $x + y + z = 0$, il nucleo di f è uguale al sottospazio $\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : x+y+z = 0\} = \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\}$. L'immagine di f è lo span delle colonne della matrice che definisce f. Vale dunque $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

   (b) Il polinomio caratteristico è $\lambda^3 - 6\lambda^2$ e gli autovalori di f sono pertanto $\lambda = 0$ e $\lambda = 6$. L'autospazio di autovalore $\lambda = 0$ è uguale a $\ker(f)$ ed è già stato determinato sopra. L'autospazio di autovalore $\lambda = 6$ è uguale a $\mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.

   (c) Siccome $\ker(f)$ non è zero, f non è iniettiva e non può essere invertibile.

4. Sia ℓ la retta di equazione parametrica $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   (a) Scrivere l'equazione cartesiana del piano π perpendicolare a ℓ e passante per $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
   (b) Scrivere le formule per S_π la riflessione rispetto a π
   (c) Scrivere un equazione parametrica per la retta immagine di ℓ mediante S_π.

   (a) Il fascio di piani perpendicolari ad ℓ ha equazione $-x_2 + 2x_3 + d = 0$. Imponendo il passaggio per $\mathbf{q}$ otteniamo che π ha equazione cartesiana $-x_2 + 2x_3 - 1 = 0$.

   (b) La retta perpendicolare a π passante per $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ ha equazione parametrica:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   L'intersezione tra tale retta ed il piano π si ha per $t = \frac{1+p_2-2p_3}{5}$ e quindi poichè il punto $\mathbf{p}$ corrisponde al valore $t = 0$ si ha che $S_\pi(\mathbf{p})$ corrisponde a $t = 2\frac{1+p_2-2p_3}{5}$ cioè:

$$S_\pi\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + \frac{2+2p_2-4p_3}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ -\frac{2}{5} + \frac{3}{5}p_2 + \frac{4}{5}p_3 \\ \frac{4}{5} + \frac{4}{5}p_2 - \frac{3}{5}p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

   (c) Poichè ℓ è perpendicolare al piano viene mandata in se stessa da S_π e quindi $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ è una equazione parametrica per l'immagine di ℓ mediante S_π.