1. Quali V sono spazi vettoriali?
   (a) $V = \{$i polinomi con coefficienti in $\mathbf{R}$ di grado 3$\}$.
   (b) $V = \mathbf{R}^2$ con la solita somma fra vettori e con prodotto definito da

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad \text{per ogni } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \text{ ed ogni } \lambda \in \mathbf{R}.$$

   (c) $V = \{x \in \mathbf{R} : x > 0\}$ con addizione "$\oplus$" e moltiplicazione "$\otimes$" definite da

$$\begin{aligned} x \oplus y &= xy; && \text{per ogni } x, y \in V, \\ \lambda \otimes x &= x^\lambda; && \text{per ogni } x \in V,\ \lambda \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

2. Disegnare i seguenti sottoinsiemi di $\mathbf{R}^2$ e controllare se sono sottospazi lineari reali:
   (a) $\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_1 = 2x_2\} \quad \subset \mathbf{R}^2$;
   (b) $\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_1 = 2\} \quad \subset \mathbf{R}^2$;
   (c) $\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_1 > 0\} \quad \subset \mathbf{R}^2$;
   (d) $\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_1 = x_2 = 0\} \quad \subset \mathbf{R}^2$;

3. Decidere se sono sottospazi o meno i seguenti sottoinsiemi W di $\mathbf{R}^3$:
   (a) $W = \{\begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} :\ 0 < t < 1\}$;
   (b) $W = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$;
   (c) $W = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : |x - 2y + z| = 0\}$.
   (d) $W = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$.

4. Sia V spazio vettoriale e sia $\mathbf{v} \in V$ un vettore. Dimostrare che $W = \{t\mathbf{v} : t \in \mathbf{R}\}$ è sottospazio vettoriale di V.

5. Scrivere i seguenti sottospazi W come $\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ per dei vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$.

   (i) $W = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^5 : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ \quad\ 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}\} \quad \subset \mathbf{R}^5$;

   (ii) $W = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 : x_1 + 2x_3 = 0\} \quad \subset \mathbf{R}^4$;

   (iii) $W = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ \quad\ \ x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}\} \quad \subset \mathbf{R}^3$.