Geometria. 1^o Esonero. 25 Marzo 2004, 16:00–18:00.

COGNOME .... *NOME* ....

Inserire le risposte negli spazi predisposti, *accompagnandole con spiegazioni* chiare ed essenziali. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Ogni esercizio vale 7.5 punti.

1. Sia $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ l'applicazione definita da

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x+y+z \\ x+2y \end{pmatrix}.$$

(a) Far vedere che f è lineare;
(b) Calcolare la dimensione di $\ker(f)$;
(c) Esibire un complemento di $\ker(f)$ in $\mathbf{R}^3$.

(a) Si verifica facilmente che f coincide con la moltiplicazione dei vettori $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ per la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Dunque, f è lineare. Alternativamente, si controlla direttamente che $f(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = f(\mathbf{v}) + f(\mathbf{w})$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{R}^3$ e che $f(\lambda \mathbf{v}) = \lambda f(\mathbf{v})$ per ogni $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$ e $\lambda \in \mathbf{R}$.

(b) I vettori $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \ker(f)$ sono quelli che soddisfano $f(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Le coordinate di $\mathbf{v}$ sono quindi soluzioni del sistema lineare omogeneo di matrice $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right)$. Usando il metodo di Gauss, si trova che $\mathbf{v} \in \ker(f)$ se e soltanto se $\mathbf{v} = t\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ per $t \in \mathbf{R}$. In altre parole, $\ker(f) = \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}\}$ e quindi $\dim(\ker(f)) = 1$.

(c) Un complemento di $\ker(f)$ è dato da $\mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$, perchè i vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti. Questo segue dalla forma triangolare della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Sia S la riflessione rispetto alla retta ℓ di equazione $x_2 = -2$. Sia m la retta di equazione $2x_1 + 3x_2 - 5 = 0$. Determinare un'equazione cartesiana per la retta m' immagine di m mediante S.

Il punto di intersezione delle rette ℓ e m è $P = \begin{pmatrix} 11/2 \\ -2 \end{pmatrix}$. Scegliamo come secondo punto sulla retta m il punto $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. La retta n che passa per Q ed è ortogonale ad l ha equazione parametrica $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(t \in \mathbf{R})$. Il punto di interesezione $R = \ell \cap n$ corrisponde al valore del parametro t per cui $1 + t = -2$. In altre parole, R corrisponde a $t = -3$. Siccome Q corrisponde a $t = 0$, la riflessione di Q rispetto ad ℓ corrisponde a $t = -6$ ed è quindi il punto $Q' = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$. La retta m' passa quindi per i punti $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/2 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $Q' = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$. Un'equazione parametrica è data da $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/2 \\ -2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 9/2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $(s \in \mathbf{R})$. Un'equazione cartesiana è data da $2x_1 - 3x_2 = 17$.

3. Dato il punto $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ e la circonferenza $C: x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 4x_2 + 7 = 0$, scrivere le equazioni parametriche delle rette tangenti a C che passano per $\mathbf{p}$.

Scrivendo l'equazione di C nella forma $(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 = 1$, vediamo che il centro di C è il punto $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. La distanza fra $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$ è $\sqrt{2}$. La circonferenza C' di centro $\mathbf{p}$ e raggio 1 interseca C in due punti $\mathbf{r}$ e $\mathbf{r}'$. Siccome $1^2 + 1^2 = (\sqrt{2})^2$, il teorema di Pitagora implica che l'angolo fra la retta l passante per $\mathbf{p}$ ed $\mathbf{r}$ e la retta che passa per $\mathbf{q}$ e $\mathbf{r}$ è di 90 gradi. Similmente, l'angolo fra la retta l' passante per $\mathbf{p}$ ed $\mathbf{r}'$ e la retta che passa per $\mathbf{q}$ e $\mathbf{r}'$ è di 90 gradi. Le rette l e l' sono quindi le due rette tangenti cercate.
Per calcolare le equazioni, osserviamo che la circonferenza C' ha equazione $(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 = 1$. Sottraendo l'equazione di C, troviamo che $2x_1 + 2x_2 = 6$ e quindi $x_2 = 3 - x_1$. Le coordinate x_1 dei punti $\mathbf{r}$ e $\mathbf{r}'$ soddisfano quindi $(x_1 - 1)^2 + (2 - x_1)^2 = 1$. In altre parole, abbiamo che $2x_1^2 - 6x_1 + 4 = 0$ e quindi $x_1 = 1$ oppure $x_1 = 2$. Troviamo che $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{r}' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Equazioni parametriche delle rette tangenti l e l' che passano per $\mathbf{p}$, sono $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(t \in \mathbf{R})$ e $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(s \in \mathbf{R})$.

4. Sia $V = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 : \begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 & = & 0; \\ x_1 + x_2 & = & 0. \end{cases}\}$ e sia $W = \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\} \subset \mathbf{R}^4$. Determinare $\dim(V \cap W)$ e $\dim(V + W)$.

Le coordinate dei vettori $\mathbf{v} \in V$ sono le soluzioni del sistema omogeneo di matrice $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. Usando il metodo di Gauss, vediamo che il sistema è equivalente al sistema $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$. Chaimando $x_3 = s$ e $x_4 = t$, troviamo il sistema triangolare $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -s+t \\ 0 & 1 & s-t \end{array}\right)$. Abbiamo che $x_2 = s - t$ e $x_1 = -s + t$ e quindi $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s+t \\ s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Questo ci dice che $V = \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$. Abbiamo quindi che $V + W = \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\}$.
Applicando il metodo di Gauss *alle colonne* di questa matrice, troviamo che

$$V + W = \mathrm{Span} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\} = \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$$

Dalla forma triangonale segue che gli ultimi tre vettori sono indipendenti e quindi che la dimensione di $V + W$ è uguale a tre. Siccome $\dim(V) = \dim(W) = 2$, la formula di Grassman implica che $\dim(V \cap W) = 2 + 2 - 3 = 1$.