COGNOME .... *NOME* ....

Inserire le risposte negli spazi predisposti, *accompagnandole con spiegazioni* chiare ed essenziali. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Ogni esercizio vale 7.5 punti.

1. Sia $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Trovare le formule della rotazione $R_{\frac{\pi}{4},\mathbf{v}}$ di angolo $\frac{\pi}{4}$ intorno a $\mathbf{v}$.

Una base ortonormale nel piano perpendicolare a $\mathbf{v}$ è data da $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.

Sia $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$. La matrice rappresentativa della rotazione rispetto alla base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ è data da $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. La matrice rappresentativa rispetto alla base canonica è quindi BAB^{-1} dove $B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$. Facendo i calcoli, si trova che le formule della rotazione sono date dalla moltiplicazione per la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{2}}{6} \\ -\frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{2}}{6} \\ -\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}.$$

2. Sia r la retta in $\mathbf{R}^3$ di equazione parametrica $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(t \in \mathbf{R})$ e sia s la retta in $\mathbf{R}^3$ di equazione parametrica $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $(t \in \mathbf{R})$.
   (a) Dimostrare che le rette r ed s non si intersecano.
   (b) Determinare la distanza fra r ed s.

(a) Sia P punto di intersezione di r e s. Allora $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t \\ -t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ 1 \\ -1+2s \end{pmatrix}$ per certi $t, s \in \mathbf{R}$. Dalla seconda coordinata si deduce che $t = -1$ e dalla terza che $0 = -1 + 2s$ e quindi $s = 1/2$. Ma questi due valori per t e s non vanno bene per la prima coordinata che è uguale a $1 + t = 0$ ma anche a $s = -1/2$. Contradizione. E quindi non c'è un punto di intersezione.

(b) Il piano π contenente la retta r e parallelo a la retta s ha equazione parametrica $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $(t, s \in \mathbf{R})$. Un vettore normale è quindi dato da $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ed un'equazione cartesiana per π è data da $2x + 2y - z = 2$. La distanza fra r e s è uguale alla distanza fra un qualsiasi punto Q di s e il piano π. Scegliamo il punto $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sulla retta s. La solita formula per la distanza da Q al piano π ci da adesso

$$\mathrm{dist}(r, s) = \mathrm{dist}(Q, \pi) = \frac{|2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 - (-1) - 2|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{1}{3}.$$

3. Siano $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $R = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$ tre punti in $\mathbf{R}^2$. Calcolare l'area del triangolo PQR.

Prima trasliamo la configurazione all'origine: facciamo una traslazione di passo $-\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. L'area cercata è l'area del triangolo $OQ'R'$ dove $Q' = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $R' = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$. Quest'ultima è uguale alla metà del valore assoluto del determinante $\det \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$, il quale è ugual a $\frac{1}{2}|2 \cdot 6 - (-1) \cdot 6| = 9$.

4. (*Solo per studenti di Ingegneria Medica*)
   (a) Dimostrare che i vettori $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $\mathbf{R}^2$ sono linearmente indipendenti.
   Sia $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ l'applicazione lineare che scambia $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.
   (b) Determinare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$.
   (c) Determinare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica.

(a) I vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono indipendenti, perché abbiamo che $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = -3 \neq 0$.

(b) Siccome $f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_2$ e $f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1$, la matrice rappresentativa di f rispetto alla base $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ è data da $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) Sia $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ la matric del cambiamento di base. Allora la matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica è data da

$$B \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$