

COGNOME NOME

Inserire le risposte negli spazi predisposti, *accompagnandole con spiegazioni* chiare ed essenziali.
 NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Ogni esercizio vale 7.5 punti.

1. Sia $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Trovare le formule della rotazione $R_{\frac{\pi}{4}, \mathbf{v}}$ di angolo $\frac{\pi}{4}$ intorno a \mathbf{v} .

Una base ortonormale nel piano perpendicolare a \mathbf{v} è data da $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.

Scrivendo R per la rotazione $R_{\frac{\pi}{4}, \mathbf{v}}$ e usando la formula per la rotazione di angolo $\frac{\pi}{4}$ intorno all'origine di \mathbf{R}^2 , abbiamo quindi che $R(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$, $R(\mathbf{v}_1) = \frac{1}{2}\sqrt{2}\mathbf{v}_1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\mathbf{v}_2$ e $R(\mathbf{v}_2) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\mathbf{v}_1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\mathbf{v}_2$. Scrivendo la matrice associata a R come $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, troviamo tre sistemi lineari, abbiamo quindi

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 1 & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ 1 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Infatti, il prodotto della prima matrice per la prime colonna della seconda matrice è uguale alla prima colonna della terza matrice, ... ecc. I coefficienti a, b, c, \dots si calcolano ò risolvendo tre sistemi lineari ò invertendo la matrice $\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 1 & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$. Facendo i calcoli, si trova

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{2}}{6} \\ -\frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{2}}{6} \\ -\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}.$$

2. Sia r la retta in \mathbf{R}^3 di equazione parametrica $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, ($t \in \mathbf{R}$) e sia s la retta in \mathbf{R}^3 di equazione parametrica $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, ($t \in \mathbf{R}$).

- (a) Dimostrare che le rette r ed s non si intersecano.
 (b) Determinare la distanza fra r ed s .

(a) Sia P punto di intersezione di r e s . Allora $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t \\ -t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ 1 \\ -1+2s \end{pmatrix}$ per certi $t, s \in \mathbf{R}$. Dalla seconda coordinata si deduce che $t = -1$ e dalla terza che $0 = -1 + 2s$ e quindi $s = 1/2$. Ma questi due valori per t e s non vanno bene per la prima coordinata che è uguale a $1+t = 0$ ma anche a $s = -1/2$. Contraddizione. E quindi non c'è un punto di intersezione.

(b) Il piano π contenente la retta r e parallelo a la retta s ha equazione parametrica $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, ($t, s \in \mathbf{R}$). Un vettore normale è quindi dato da $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ed un'equazione cartesiana per π è data da $2x + 2y - z = 2$. La distanza fra r e s è uguale alla distanza fra un qualsiasi punto Q di s e il piano π . Scegliamo il punto $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sulla retta s . La solita formula per la distanza da Q al piano π ci da adesso

$$\text{dist}(r, s) = \text{dist}(Q, \pi) = \frac{|2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 - (-1) - 2|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{1}{3}.$$

3. Siano $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $R = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$ tre punti in \mathbf{R}^2 . Calcolare l'area del triangolo PQR .

Prima trasliamo la configurazione all'origine: facciamo una traslazione di passo $-\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. L'area cercata è l'area del triangolo $OQ'R'$ dove $Q' = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $R' = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$. Quest'ultima è uguale alla metà del valore assoluto del determinante $\det \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$, il quale è ugual a $\frac{1}{2}|2 \cdot 6 - (-1) \cdot 6| = 9$.

4. (Solo per studenti di Ingegneria Civile)

Sia $f : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$ l'applicazione data da $f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

- (a) Calcolare $W = \ker(f) \cap \text{Im}(f)$.
 (b) Esibire un complemento di W in $\ker(f)$.

(a) Abbiamo che $f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ è zero, se e soltanto se $x_1 = x_2 = 0$. L'immagine di

f consiste in vettori della forma $\begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \\ s \end{pmatrix}$, con $t, s \in \mathbf{R}$. L'intersezione $W = \ker(f) \cap \text{Im}(f)$

quindi, consiste nei vettori nell'immagine che hanno non solo la prima, ma anche la seconda coordinata uguale a zero. In altre parole, abbiamo che $t = 0$ e quindi W è lo span del vettore \mathbf{e}_4 della base canonica.

(b) La dimensione di W è uguale a 1 mentre la dimensione di $\ker(f)$ è uguale a 2. Un complemento di W in $\ker(f)$ ha quindi dimensione ugual a $2 - 1 = 1$ ed è uguale allo span

di un qualsiasi vettore \mathbf{v} in $\ker(f) - W$. Per esempio $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.