COGNOME .... *NOME* ....

Inserire le risposte negli spazi predisposti, *accompagnandole con spiegazioni* chiare ed essenziali. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Ogni esercizio vale 7.5 punti.

1. Sia l la retta in $\mathbf{R}^3$ di equazione parametrica $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $(t \in \mathbf{R})$ e sia r la retta data dalle equazioni $x + z = 4$ e $y + 3z = 8$. Sia π il piano di equazione $x - 5y - 2z = 0$.
   (a) Scrivere un'equazione cartesiana della retta l' immagine di l mediante la riflessione S_π.
   (b) Scrivere un'equazione parametrica della retta r' immagine di r mediante la riflessione S_π.

(a) La retta l è contenuta nel piano π e quindi $l' = l$. Per vedere che $l \subset \pi$ si controlla semplicemente che le coordinate di due punti distinti di l soddisfano l'equazione di π. Un'equazione cartesiana di $l' = l$ è data da $y + z = 2$ e $x + 3z = 10$.

(b) La retta r interseca il piano π nel punto $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ determinato dal sistema $\begin{cases} x + z &= 4 \\ y + 3z &= 8 \\ x - 5y - 2z &= 0 \end{cases}$. La soluzione è data da $x = 1$, $y = -1$, $z = 3$. Riflettiamo un secondo punto Q di r rispetto al piano π. Prendiamo $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. La retta che passa per Q ed è ortogonale a π ha equazione parametrica $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$, $(t \in \mathbf{R})$. Il punto di intersezione corrisponde al valore di t per cui vale $(2 + t) - 5(2 - 5t) - 2(2 - 2t) = 0$ e quindi $t = 2/5$. Il punto Q', che è il riflesso di Q rispetto a π, corrisponde quindi a $t = 4/5$ ed è uguale a $Q' = \begin{pmatrix} 14/5 \\ -2 \\ 2/5 \end{pmatrix}$. La retta r' cercata è quella che passa per P e Q'. Una sua equazione parametrica è data da $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -9/5 \\ 1 \\ 13/5 \end{pmatrix}$, $(t \in \mathbf{R})$.

2. Calcolare
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{100}.$$
   Spiegare la risposta.

Troveremo una formula generale per la potenza $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$. Calcolando $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ... ecc., non è difficile indovinare che la formula cercata è $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e quindi $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 200 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Per dimostrare questo, si osserva che abbiamo che $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x + y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ per ogni $x, y \in \mathbf{R}$ e quindi

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{n \text{ volte}} = \begin{pmatrix} 1 & \underbrace{2 + 2 + \cdots 2}_{n \text{ volte}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Sia $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ e sia $R_{\frac{\pi}{4},P}$ la rotazione di angolo $\frac{\pi}{4}$ e di centro P.
   (a) Determinare la retta l la cui immagine mediante $R_{\frac{\pi}{4},P}$ è la retta di equazione $x = 1$.
   (b) Sia r la retta perpendicolare a l e passante per l'origine. Determinare la retta m immagine di r mediante $R_{\frac{\pi}{4},P}$.

(a) Dobbiamo ruotare la retta di equazione $x = 1$ di un angolo uguale a $-\frac{\pi}{4}$ intorno al punto P. Prima applichiamo una traslazione di passo $-\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, poi una rotazione di angolo $-\frac{\pi}{4}$ e di centro l'origine e finalmente applichiamo una traslazione di passo $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Queste tre operazioni portano la retta di equazione $x = 1$ prima nella retta di equazione $x = 0$, poi nella retta di equazione $x = y$ e finalmente nella retta di equazione $y = x + 2$.
(b) La retta r è la retta di equazione $y + x = 0$. Per calcolare l'immagine di r mediante la rotazione $R_{\frac{\pi}{4},P}$ facciamo tre passi: prima applichiamo una traslazione di passo $-\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, poi una rotazione di angolo $\frac{\pi}{4}$ e di centro l'origine e finalmente applichiamo una traslazione di passo $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Queste tre operazioni portano la retta di equazione $y + x = 0$ prima nella retta di equazione $y + x = -4$, poi nella retta di equazione $y = -2\sqrt{2}$ e finalmente nella retta di equazione $y = 3 - 2\sqrt{2}$.

Per vedere il secondo passo, basta considerare i punti $\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ sulla retta di equazione $y + x = -4$ e calcolare le loro immagini mediante la rotazione di angolo $\frac{\pi}{4}$ intorno all'origine. Sia $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Abbiamo che $A\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix}$ e $A\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Gli ultimi due punti determinano la retta di equazione $y = -2\sqrt{2}$.

4. Sia $W \subset \mathbf{R}^4$ lo span dei vettori $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Sia V il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ di equazione cartesiana $x + y + z + w = 0$.
   (a) Determinare delle equazioni cartesiane per $V + W$.
   (b) Calcolare la dimensione di $V \cap W$.
   (c) Esibire un complemento per $V \cap W$ in V.

Siccome la somma delle loro coordinate è zero, i due vettori $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ che generano W sono contenuti in V. Abbiamo quindi che $W \subset V$ e allora $V + W = V$ e $V \cap W = W$.
(a) Un'equazione cartesiana di $V+W$ è quindi semplicemente quella che caratterizza V, cioè $x+y+z+w = 0$.
(b) La dimensione di $V \cap W$ è uguale a quella di W ed è uguale a 2, perché i due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono indipendenti.
(c) Siccome $\dim(V) = 3$ e $\dim(W) = 2$, un complemento W' di $W = V \cap W$ in V ha dimensione $1 = 3 - 2$. Possiamo prendere $W' = \text{Span}(\mathbf{x})$ dove $\mathbf{x}$ è un qualsiasi vettore in V che non sta in W. Per esempio $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.