Geometria. 2^o Appello. 7 Maggio 2004, 11:00–13:00.

COGNOME .... *NOME* ....

Inserire le risposte negli spazi predisposti, *accompagnandole con spiegazioni* chiare ed essenziali. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Ogni esercizio vale 7.5 punti.

1. Sia S la sfera $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 1$ ed ℓ la retta d'equazione parametrica $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Determinare un piano π contenente ℓ e tangente a S.
   (b) Sia π' il piano perpendicolare a ℓ e passante per $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Determinare il raggio della circonferenza intersezione di π' con S.

   (a) La retta ℓ é tangente alla sfera nel punto $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. L'equazione del piano tangente ad S in $\mathbf{q}$ é $x_3 = 1$ che, si verifica immediatamente, contiene ℓ. Quindi un piano π tangente ad S e contenente ℓ ha equazione parametrica $x_3 = 1$.
   (b) Il piano π' perpendicolare ad ℓ passante per $\mathbf{p}$ ha equazione $x_1 + x_2 - 4 = 0$. La distanza di π' dal centro della sfera é:
   $$d(\pi', C_S) = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2},$$
   che é maggiore del raggio della sfera e quindi il piano non interseca la sfera.

2. Sia $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
   (a) Calcolare le formule per $R_{-\frac{\pi}{3},\mathbf{p}}$ la rotazione di centro $\mathbf{p}$ ed angolo $-\frac{\pi}{3}$
   (b) Sia ℓ la retta di equazione cartesiana $3x_1 - 4x_2 + 3 = 0$. Calcolare un equazione parametrica per la retta r immagine di ℓ mediante $R_{-\frac{\pi}{3},\mathbf{p}}$.
   (c) Esiste una retta $m \subset \mathbf{R}^2$ la cui immagine mediante $R_{-\frac{\pi}{3},\mathbf{p}}$ coincide con se stessa? (giustificare la risposta)

   (a) Sia $R_{-\frac{\pi}{3}}$ la rotazione di angolo $-\frac{\pi}{3}$ con centro l'origine. Poiché $R_{-\frac{\pi}{3},\mathbf{p}} = T_{\mathbf{p}} \circ R_{-\frac{\pi}{3}} \circ T_{-\mathbf{p}}$ si ha che
   $$R_{-\frac{\pi}{3},\mathbf{p}}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_2 - \frac{1}{2}(1+3\sqrt{3}) \\ \frac{-\sqrt{3}}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}(3-\sqrt{3}) \end{pmatrix}$$
   (b) Due punti sulla retta ℓ sono $\mathbf{q}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{q}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$. Le loro immagini mediante $R_{-\frac{\pi}{3}\mathbf{p}}$ sono:
   $$R_{-\frac{\pi}{3},\mathbf{p}}(\mathbf{q}_1) = \begin{pmatrix} -1 - \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \qquad R_{-\frac{\pi}{3},\mathbf{p}}(\mathbf{q}_2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{9}{8}\sqrt{3} \\ \frac{15}{8} - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$
   Quindi la retta r ha equazione parametrica:
   $$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 - \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{8} \\ \frac{3}{8} - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \qquad (t \in \mathbf{R}).$$
   (c) Tale retta non esiste. Basta far vedere che non esiste nessuna retta che viene mandata in se stessa da $R_{-\frac{\pi}{3}}$. Se ℓ é una retta passante per l'origine denotiamo con α l'angolo formato da ℓ con l'asse $x_2 = 0$. Allora la retta immagine di ℓ mediante $R_{-\frac{\pi}{3}}$ forma un angolo di $\alpha - \frac{\pi}{3}$ con l'asse $x_2 = 0$ e quindi non puó coincidere con ℓ. Per il caso generale sia $\mathbf{q}$ il punto di intersezione di ℓ con la retta perpendicolare ad ℓ passante per l'origine. L'immagine di $\mathbf{q}$ mediante $R_{-\frac{\pi}{3}}$ ha la stessa distanza di $\mathbf{q}$ dall'origine e quindi non appartiene ad ℓ .

3. Sia $f : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^4$ l'applicazione data da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcolare delle equazioni cartesiane per $\ker(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$.
(b) Calcolare il polinomio caratteristico di f.
(c) Per ogni autovalore di f, determinare l'autospazio corrispondente.

(a) Siccome abbiamo $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ se e soltanto se $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, il nucleo di f è dato dalle tre equazioni $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, e $x_3 = 0$. Siccome $\mathrm{Im}(f)$ è lo span delle colonne della matrice, ogni equazione $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0$ di $\mathrm{Im}(f)$ deve avere la proprietà $a_2 = a_3 = a_4 = 0$. L'immagine di f è quindi data dall'equazione $x_1 = 0$.

(b) Il polinomio caratteristico $p(\lambda)$ è uguale al determinante della matrice $\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$.
Siccome la matrice è triangolare, il determinante è il prodotto dei termini sulla diagonale. Abbiamo quindi che $p(\lambda) = (-\lambda)^4 = \lambda^4$.

(c) Dalla parte (b) segue che l'unico autovalore di f è $\lambda = 0$. L'autospazio corrispondente è il nucleo di f, che è già stato determinato nella parte (a).

4. Sia $V = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 : x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ e sia $W = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in V : x_2 = x_4\}$.

(a) Determinare la dimensione di W.
(b) Esibire un complemento W' di W in $\mathbf{R}^4$.
(c) Dimostrare che per ogni complemento W' si ha che $\dim(V \cap W') = 1$.

(a) Lo spazio W è contenuto in V. Le coordinate dei vettori di W soddisfano quindi non solo l'equazione $x_2 = x_4$, ma *anche* l'equazione $x_1 + x_2 - x_3 = 0$, che caratterizza V. Le coordinate dei vettori di W sono quindi le soluzioni del sistema omogeneo di matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Con il metodo di Gauss, si calcola che W è lo span di $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Siccome i due vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ sono indipendenti, la dimensione de W è uguale a 2.

(b) Un complemento W' di W è per esempio dato dallo span dei due vettori $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Questo segue dal fatto che i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ e $\mathbf{v}_4$ sono linearmente indipendenti.

(c) Ogni complemento W' di W ha dimensione 2. L'intersezione $V \cap W'$ può avere quindi dimensione $0, 1$ oppure 2. Se la dimensione fosse 0, allora per Grassmann avremmo $\dim(V + W') = 3 + 2 = 5$, il che è impossibile, perché $V + W'$ è contenuto in $\mathbf{R}^4$. Se la dimensione fosse 2, allora avremmo che $W' \subset V$ e quindi $W + W' \subset V$. Ma questo è impossibile perché abbiamo che $W + W' = \mathbf{R}^4$. L'unica possibilità è quindi che sia $\dim(V \cap W') = 1$.