1. Dire se $V = \mathbf{R}^2$ con il solito vettore zero e la solita somma fra vettori ma con prodotto con scalari definito da

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{per ogni } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \text{ ed ogni } \lambda \in \mathbf{R}$$

è uno spazio vettoriale o meno.

2. Disegnare i seguenti sottoinsiemi di $\mathbf{R}^2$ e controllare se sono sottospazi vettoriali:
   (a) $\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_1 = 2x_2\} \subset \mathbf{R}^2$, (c) $\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_1 = 2\} \subset \mathbf{R}^2$,
   (b) $\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_1 > 0\} \subset \mathbf{R}^2$, (d) $\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_1 = x_2 = 0\} \subset \mathbf{R}^2$.

3. Decidere se sono sottospazi o meno i seguenti sottoinsiemi di $\mathbf{R}^3$.
   (a) $W = \{\begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : 0 < t < 1\}$, (c) $W = \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$,
   (b) $W = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : |x-2y+z| = 0\}$, (d) $W = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 0\}$.

4. Sia W il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ dato da

$$W = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 : \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 3x_3 + 2x_4 &= 0 \end{cases} \}.$$

Decidere se $W = \{\mathbf{0}\}$ o meno.

5. Scrivere i seguenti sottospazi W come $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r)$ per dei vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$.
   (a) $W = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^5 : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ \quad\; 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \} \subset \mathbf{R}^5$;
   (b) $W = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 : x_1 + 2x_3 = 0\} \subset \mathbf{R}^4$.

6. Sia V uno spazio vettoriale e sia $\mathbf{0}$ il vettore zero di V.
   (a) Dimostrare che ogni vettore $\mathbf{v}$ in V ha un *unico* vettore opposto $\mathbf{v}' \in V$. Cioè: per ogni $\mathbf{v} \in V$ esiste un *unico* $\mathbf{v}' \in V$ con $\mathbf{v} + \mathbf{v}' = \mathbf{0}$.
   (b) Sia $\mathbf{v} \in V$. Dimostrare che $(-1) \cdot \mathbf{v}$ è il vettore opposto di $\mathbf{v}$.