Geometria 13. Matrici simmetriche, Hermitiane, ortogonali, unitarie. Roma, 20 dic. 2024.

1. Sia B la matrice simmetrica
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Esibire una base ortonormale di autovettori di B.

2. Siano $a, b \in \mathbf{R}$ e sia A la matrice simmetrica data da $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.
   (a) Calcolare il polinomio caratteristico di A e verificare che i suoi zeri sono in $\mathbf{R}$.
   (b) Esibire una base ortonormale di $\mathbf{R}^2$ di autovettori di A.

3. Sia H la matrice Hermitiana $\begin{pmatrix} 0 & i & 1 \\ -i & 0 & i \\ 1 & -i & 0 \end{pmatrix}$. Determinare una base ortonormale di $\mathbf{C}^3$ di autovettori di H.

4. Dimostrare che il prodotto di due matrici ortogonali e ancora ortogonale. Dimostrare che l'inversa di una matrice ortogonale è ortogonale. Stesse domande per matrici unitarie.

5. Dimostrare che la somma di due matrici simmetriche e ancora simmetrica. Stessa domanda per matrici Hermitiane.

6. Sia U la matrice $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Dimostrare che U è unitaria.
   (b) Calcolare il polinomio caratteristico di U e verificare che gli autovalori sono $\frac{1 \pm i}{\sqrt{2}}$.
   (c) Esibire una base ortormale di $\mathbf{C}^2$ di autovettori di U.

7. Siano $a, b, c \in \mathbf{R}$ non tutti nulli con la proprietà che $ab + bc + ca = 0$ e sia
$$M = \frac{1}{a+b+c} \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}.$$
   (a) Dimostrare che $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$.
   (b) Dimostrare che M è una matrice ortogonale.
   (c) Esibire a, b, c non nulli in $\mathbf{R}$ con $ab + bc + ca = 0$.

8. Per $n \geq 1$, sia A la seguente matrice $n \times n$
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Per ogni $n \geq 1$ determinare gli autovalori di A e loro molteplicità algebriche e geometriche.