Geometria 12. Prodotto scalare, Gram-Schmidt, algebra su $\mathbf{C}$. Roma, 12 dicembre 2024.

1. Siano dati i vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$.
   (a) Far vedere che formano una base di $\mathbf{R}^3$.
   (b) Ortonormalizzarla col metodo di Gram-Schmidt.

2. Controllare se i vettori $\begin{pmatrix} -2/7 \\ 3/7 \\ 6/7 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 6/7 \\ -2/7 \\ 3/7 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3/7 \\ 6/7 \\ -2/7 \end{pmatrix}$ formano una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$.

3. Sia W il piano in $\mathbf{R}^4$ di equazione $x + y - z = 0$. Esibire una base ortonormale di W. (usare il solito prodotto scalare in $\mathbf{R}^4$)

4. Sia $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4$. Esibire una base ortonormale del complemento ortogonale di $W = \mathrm{Span}(\mathbf{v})$. (usare il solito prodotto scalare in $\mathbf{R}^4$)

5. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione n dotato di prodotto scalare $\langle -, - \rangle$. Sia $\mathbf{v} \in V$ un vettore con $\|\mathbf{v}\| = 1$. Definiamo $f : V \longrightarrow V$ mediante
$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \langle \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} \rangle \, \mathbf{v}, \qquad \text{per } \mathbf{x} \in V.$$
   (a) Dimostrare che f è lineare.
   (b) Far vedere che $f^2 = f$. (con f^2 indichiamo la funzione composta $f \circ f$)
   (c) Determinare la dimensione del nucleo e dell'immagine di f.
   (d) Geometricamente cosa fa f?

6. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbf{R}$ dotato di prodotto scalare $\langle -, - \rangle$. Sia $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ una base di V. Sia A la matrice $n \times n$ con coordinate $a_{ij} = \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle$ per $1 \le i, j \le n$. Dimostrare che A è invertibile.

7. Sia $f : \mathbf{C}^3 \longrightarrow \mathbf{C}^3$ la mappa data dalla moltiplicazione per la matrice $\begin{pmatrix} 2 & i & 1 \\ i & -1 & 0 \\ 0 & 1 & i \end{pmatrix}$. Calcolare la dimensione (complessa) del nucleo di f e dell'immagine di f.

8. Sia $f : \mathbf{C}^2 \longrightarrow \mathbf{C}^2$ la mappa data dalla moltiplicazione per la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1+2i \\ i & i-2 \end{pmatrix}$.
   (a) Determinare il polinomio caratteristico di f. Far vedere che gli autovalori di f sono 1 ed i.
   (b) Per ogni autovalore determinare l'autospazio corrispondente.

9. Siano $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} i \\ 2-i \end{pmatrix}$ e $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ i-1 \end{pmatrix}$ in $\mathbf{C}^2$ e sia $\langle -, - \rangle$ il solito prodotto Hermitiano su $\mathbf{C}^2$. Calcolare $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ e $\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle$, $\|\mathbf{v}\|$ e $\|\mathbf{w}\|$. (Per $\mathbf{u} \in \mathbf{C}^2$ scriviamo $\|\mathbf{u}\|$ per $\sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$.)