COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 5 punti.

1. Siano $P = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$ ed $R = \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \end{pmatrix}$ tre punti in $\mathbf{R}^2$. Calcolare l'area del triangolo PQR.

2. Sia $g : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione data da $g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$. Calcolare la matrice rappresentativa di g rispetto alla base (in dominio e codominio)
$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Sia $S \subset \mathbf{R}^3$ la sfera di equazione $(x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 + (x_3 - 2)^2 = 9$. Sia $\pi \subset \mathbf{R}^3$ il piano di equazione $-2x_1 + x_3 + 1 = 0$. Verificare che l'intersezione fra π ed S è una circonferenza e calcolarne il raggio.

4. Sia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ la rotazione intorno $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ di 60 gradi (in senso antiorario) e sia Q il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Calcolare le coordinate di $f(Q)$.

5. Sia $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calcolare A^{100}.

6. Sia H la matrice Hermitiana $\begin{pmatrix} 0 & i & 1 \\ -i & 0 & i \\ 1 & -i & 0 \end{pmatrix}$. Determinare una base ortonormale di $\mathbf{C}^3$ di autovettori di H.

Soluzioni.

1. Traslare il triangolo PQR di passo $\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ non cambia l'area. Basta quindi calcolare l'area del triangolo $OQ'R'$ dove O è l'origine e $Q' = \begin{pmatrix} 13 \\ 8 \end{pmatrix}$ e $R' = \begin{pmatrix} 21 \\ 13 \end{pmatrix}$, che è uguale a $\frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} 13 & 21 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}$. Poiché $13^2 - 8 \cdot 21 = 1$, l'area cercata è quindi uguale a $\frac{1}{2}$.

2. Abbiamo che $g(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3$, $g(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1$ e $g(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_2$. La matrice rappresentativa cercata è quindi $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Questo è l'eserczio 6 del foglio 6.
4. L'applicazione f è uguale alla traslazione di passo $-\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ seguita dalla rotazione di 60 gradi intorno all'origine e poi dalla traslazione di passo $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. La formula per f è quindi data da

$$f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\phi & -\operatorname{sen}\phi\\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-1\\y-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},$$

dove $\phi=\pi/3$. Un piccolo calcolo mostra che $f(Q)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\\ \frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\end{pmatrix}$.
5. Il polinomio caratteristico di A è $(\lambda-3)^2$ e si può verificare che A *non* è diagonalizzabile. Però, la matrice $B=A-3\,\mathrm{Id}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & -2\end{pmatrix}$ ha polinomio caratteristico $\lambda^2=0$ e soddisfa $B^2=0$. Allora si ha che $A^2=(3\,\mathrm{Id}+B)^2=3^2\mathrm{Id}+2\cdot 3B+B^2=3^2\mathrm{Id}+2\cdot 3B$. E similmente

$$A^k=(3\,\mathrm{Id}+B)^k=3^k\mathrm{Id}+k3^{k-1}B=3^{k-1}\begin{pmatrix}3+2k & 4k\\ -k & 3-2k\end{pmatrix},\qquad \text{per ogni } k\geq 1.$$

Ora basta prendere $k=100$
6. Questo è l'eserczio 3 del foglio 13.