Geometria (Schoof) | 5^o appello | 4 settembre 2025, ore 14:00–16:00.

COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 5 punti.

---

1. Sia W il sottospazio in $\mathbf{R}^4$ di equazione $x_1+x_2-x_3=0$. Esibire una base ortonormale di W (usare il solito prodotto scalare in $\mathbf{R}^4$).

2. Sia A la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Esibire una base ortonormale di autovettori di A.

3. Sia $S_1 \subset \mathbf{R}^3$ la sfera di equazione $x^2+y^2+z^2=1$ e sia $S_2 \subset \mathbf{R}^3$ la sfera di equazione $(x-1)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=2$. Determinare la distanza fra S_1 ed S_2.

4. Sia $W \subset \mathbf{R}^4$ il sottospazio dato dalle equazioni $x_3=x_4$ e $x_3+x_4=0$. Sia $f: W \longrightarrow W$ la mappa lineare data da $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$. Calcolare il polinomio caratteristico di una matrice rappresentativa di f.

5. Sia $g: \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ la mappa lineare data dalla rotazione di angolo $\pi/3$ intorno ad una retta passante per l'origine. Calcolare la traccia di una matrice rappresentativa di g.

6. Sia $C \subset \mathbf{R}^2$ la conica di equazione $2X^2-3XY-2Y^2-X+2Y=0$. Dire di che tipo di conica si tratta.

Soluzioni.

1. Questo è l'esercizio 3 del foglio 12.
2. Il polinomio caratteristico di A è $\lambda^3-3\lambda+2=(\lambda-1)^2(\lambda+2)$. L'autospazio di autovalore $\lambda=-2$ è Span $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. L'autospazio di autovalore $\lambda=1$ è il piano V di equazione cartesiana $x+y-z=0$. Una base ortogonale di V è data da $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. E quindi,
$$\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
è una base ortormale di autovettori di A.
3. La distanza fra i centri di S_1 ed S_2 è $\sqrt{1^2+3^2+1^2}=\sqrt{11}$. La distanza fra le sfere è quindi uguale a $\sqrt{11}$ meno la somma dei due raggi, vale a dire $\sqrt{11}-1-\sqrt{2}$.

4. Una base di W è data da $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Si ha che $f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2$ e $f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1$.

   La matrice rappresentativa di f rispetto a questa base è quindi $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ con polinomio caratteristico $X^2 - 1$.
5. Sia r la retta passante per l'origine e sia $\mathbf{v}_1$ un vettore direttore della retta r. Siano $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ una base ortonormale del complemento ortogonale W di r. Allora g fissa $\mathbf{v}_1$ e preserva il piano W. La restrizone di g a W è una rotazione di angolo $\pi/3$ intorno all'origine. La sua matrice rappresentativa rispetto alla base $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ ha quindi la forma $\begin{pmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$ con $\phi = \pi/3$. Rispetto alla base $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ la matrice rappresentativa di g è quindi

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ 0 & \operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{pmatrix}.$$

   La sua traccia è $1 + 2\cos\phi = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 2$.
6. Questo è l'esercizio 3 (e) del foglio 14.