Geometria (Schoof) 4^o appello 21 luglio 2025, ore 14:00–16:00.

COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 5 punti.

1. Sia $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ la proiezione ortogonale sul piano di equazione parametrica $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $(s, t \in \mathbf{R})$. Sia $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calcolare $f(P)$.

2. Sia $S \subset \mathbf{R}^3$ la sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Siano $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
   Determinare equazioni cartesiane per i piani tangenti ad S passanti per P e Q.

3. Sia $n \geq 0$. Scriviamo $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ per il prodotto scalare standard di $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{R}^n$ e scriviamo $\| \mathbf{v} \| = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle^{1/2}$. Dimostrare che per ogni $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ in $\mathbf{R}^n$ vale
   $$\| \mathbf{v} + \mathbf{w} \|^2 + \| \mathbf{v} - \mathbf{w} \|^2 = 2\| \mathbf{v} \|^2 + 2\| \mathbf{w} \|^2.$$

4. Siano $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ due vettori indipendenti in $\mathbf{R}^2$. Sia $W = \mathrm{Span}(\mathbf{v}_1)$ e sia $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ la simmetria rispetto a W.
   (a) Determinare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ (in dominio e codominio).
   (b) Determinare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica (in dominio e codominio).

5. Sia $W \subset \mathbf{R}^3$ il sottospazio di equazione $x + 2y + 3z = 0$ e sia $W' = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Esiste un'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ con $\ker f = W$ e immagine di f uguale a W'? Se esiste, scrivere la matrice rappresentativa di tale f rispetto alla base canonica.

6. Per $n \geq 1$, sia A la seguente matrice $n \times n$
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   Per ogni $n \geq 1$ determinare $\det(A)$.

Soluzioni.

1. Un vettore normale a V è $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e un'equazione cartesiana di V è $2x - y - z = 2$. Il punto $f(P)$ è l'intersezione di V con la retta data da $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (con $t \in \mathbf{R}$). Il parametro t corrispondente a $f(P)$ soddisfa $2 \cdot 2t - (1-t) - (1-t) = 2$ e quindi $t = 2/3$. Ne segue che $f(P) = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$.
2. Sia π un piano tangente a S, passante per P e Q. Sia $R = \pi \cap S$. Allora le rette PR e QR sono perpendicolari al vettore R. Otteniamo tre equazioni per le coordinate x, y, z di R:
$$\begin{aligned} (x-1)x + y^2 + (z-2)z &= 0, \\ x^2 + (y-1)y + (z-2)z &= 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 4. \end{aligned}$$
Ne segue che
$$\begin{aligned} 4 - x - 2z &= 0, \\ 4 - y - 2z &= 0. \end{aligned}$$
Le soluzioni di questo sistema formano la retta r data da $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $(t \in \mathbf{R})$. L'intersezione $r \cap S$ consiste in due punti corrispondenti alle soluzioni di $4t^2 + 4t^2 + (2-t)^2 = 4$ e quindi $t = 0$ oppure $t = 4/9$. Per $t = 0$ otteniamo il punto $R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Un'equazione per il piano passante per P, Q ed R è $z = 2$. Invece per $t = 4/9$ troviamo il punto $R = \begin{pmatrix} 8/9 \\ 8/9 \\ 14/9 \end{pmatrix}$. In questo caso un'equazione per il piano passante per P, Q ed R è data da $4x + 4y + 7z = 18$.
3. Questo è l'eserczio 7 del foglio 6.
4. La retta r passante per $\mathbf{v}_2$ ed ortogonale a W è data da $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $(t \in \mathbf{R})$ e interseca W nel punto $\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$, per $t = -3/2$. Quindi $f(\mathbf{v}_2) = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ perché corrisponde a $t = -3$. Siccome $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ è uguale a $-\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$, la matrice rappresentative rispetto alla base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ è $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Invece, rispetto alla base canonica $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ la situazione è più facile, perché si ha visibilmente che $f(\mathbf{e}_1) = -\mathbf{e}_2$, mentre $f(\mathbf{e}_2) = -\mathbf{e}_1$. La matrice rappresentattiva rispetto alla base canonica è quindi $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
5. Si, f esiste. Per esempio la moltiplicazione per la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.
6. Si tratta di una versione semplificata dell'eserczio 8 del foglio 13.