

COGNOME

NOME

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 5 punti.

1. Sia $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ la simmetria rispetto al piano π di equazione $x + y + 2z = 3$.
Calcolare $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, dove $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è un generico vettore di $\mathbf{R}^3$.
2. Siano A e B due matrici $n \times n$ con coefficienti reali. Dimostrare che
$$\text{rango}(A) + \text{rango}(B) \geq \text{rango}(A + B).$$
3. Sia C la conica in $\mathbf{R}^2$ di equazione $5X^2 + 4XY + 2Y^2 - 4X - 4Y + 2 = 0$. Dire di che tipo di conica si tratta.
4. Sia $p: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare data dalla proiezione ortogonale sul piano di equazione $x - y + 2z = 0$. Determinare una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di p .
5. Sia data la base di $\mathbf{R}^3$ formata dai vettori $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Sia $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_2$, $f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_3$ e $f(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1$. Determinare la matrice rappresentativa di f .
6. Sia r la retta in $\mathbf{R}^3$ di equazione parametrica $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, (con $t \in \mathbf{R}$)
e sia s la retta in $\mathbf{R}^3$ data dalle equazioni $x = z + 1$ e $2x = y + 1$. Determinare la distanza fra r ed s .

Soluzioni.

1. L'immagine di un generico vettore tramite la simmetria è data da $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
per qualche $t \in \mathbf{R}$. Poiché le distanze di $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ed $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ da π sono uguali, abbiamo che

$$\frac{|x + y + 2z - 3|}{\sqrt{6}} = \frac{|x + y + 2z + 6t - 3|}{\sqrt{6}}.$$

Questo implica che $x + y + 2z - 3 = \pm(x + y + 2z + 6t - 3)$ e quindi $t = 0$ oppure $t = -\frac{1}{3}(x + y + 2z - 3)$. Ne segue che

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{1}{3}(x + y + 2z - 3) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Questo è l'esercizio 7 del foglio 13.
3. Questo è l'esercizio 3 (f) del foglio 14.
4. Un vettore $\mathbf{v}_1$ normale al piano è un autovettore di p di autovalore 0. Il piano stesso è l'autospazio di autovalore 1. I due vettori $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, formano una base ortonormale di π . Assieme al vettore normale $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ formano la base ortonormale cercata.
5. La matrice rappresentativa di f rispetto alla base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ è data da

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

I vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ formano le colonne della matrice B del cambiamento di base. E quindi la matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica è

$$B \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 6 & -3 & -5 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. La retta s ammette l'equazione parametrica $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, (con $t \in \mathbf{R}$). Ne segue che le rette r ed s sono parallele. La distanza fra r e s è quindi uguale alla distanza fra P e Q dove $P = r \cap \pi$ e $Q = s \cap \pi$ e π è un piano ortogonale ad r ed s . Prendiamo per π il piano di equazione $x + 2y + z = 0$. Allora $P = \begin{pmatrix} 5/6 \\ -1/3 \\ -1/6 \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}$. La distanza fra r e s è quindi uguale a $\sqrt{(1/3)^2 + (-1/3)^2 + (1/3)^2} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$.