COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 5 punti.

1. Sia $g : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ l'applicazione lineare data da $g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y-z \\ -2x-2y+2z \end{pmatrix}$. Calcolare una base per $\ker(g)$ e una base per $\mathrm{im}(g)$.
2. Sia B la matrice simmetrica
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Esibire una base ortonormale di autovettori di B.
3. Determinare le soluzioni $\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^2$ del sistema lineare qui sotto (portare i numeri complessi nella forma $a+bi$ con $a, b \in \mathbf{R}$):
$$\begin{cases} iz + w &= 2 \\ 2z + w &= 3, \end{cases}$$
4. Consideriamo i vettori $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $\mathbf{R}^3$. Sia W lo span di $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ e sia $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ la proiezione ortogonale su W.
   (a) Dimostrare che $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono indipendenti.
   (b) Determinare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ (in dominio e codominio).
   (c) Determinare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica (in dominio e codominio).
5. Sia C la circonferenza in $\mathbf{R}^2$ di equazione $(x-1)^2+y^2 = 4$ e sia $Q = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$. Determinare equazioni cartesiane delle rette tangenti a C uscenti da Q.
6. Sia $g : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ la rotazione intorno ad una retta r passante per l'origine. Sia A una matrice rappresentativa di g. Dimostrare che il valore assoluto della traccia di A è ≤ 3.

Soluzioni.

1. Questo è l'esercizio 1 del foglio 7.
2. Questo è l'esercizio 1 del foglio 13.
3. La seconda equazione implica che $w = 3 - 2z$. Sostituendo nella prima equazione si ottiene $iz + (3 - 2z) = 2$ e quindi $z = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$ e $w = \frac{11}{5} - \frac{2}{5}i$.

4. (b) È chiaro che f fissa $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$. Poiché $\mathbf{v}_3$ è perpendicolare a $\mathbf{v}_1$ e a $\mathbf{v}_2$, si ha che $f(\mathbf{v}_3) = 0$. La matrice rappresentativa rispetto alla base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ è quindi $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. (c) Sia B la matrice che ha come colonne i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$. Allora B è la matrice del cambiamento dalla base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ alla base canonica. La matrice rappresentativa A rispetto alla base canonica è

$$BA'B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

5. Il centro di C è $S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ci sono due tangenti a C uscenti da Q. Siano $P_1, P_2 \in C$ i due punti di tangenza. La distanza $d(S, Q)$ da S a Q è $2\sqrt{10}$. Sia $d = d(P_1, Q) = d(P_2, Q)$. Siccome il raggio di C è 2, il teorema di Pitagora implica che $d = \sqrt{40 - 4} = 6$. I punti P_1 e P_2 sono quindi i punti di intersezione di C e C' dove C' è la circonferenza di equazione $(x - 7)^2 + (y - 2)^2 = 36$.

   Sottrarre le equazioni di C e C' ci dà l'equazione $y + 3x = 5$ della retta passante per P_1 e P_2. Sostituire $y = 5 - 3x$ nella equazione di C ci dà l'equazione $(x - 1)^2 + (5 - 3x)^2 = 4$ e quindi $x = 1$ oppure $x = \frac{11}{5}$. I due punti P_1 e P_2 sono quindi dati da $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} \frac{11}{5} \\ -\frac{8}{5} \end{pmatrix}$. Le due rette cercate hanno equazione $y = 2$ e $3x - 4y = 13$.

6. Rispetto ad una base opportuna la matrice rappresentativa di g ha la forma

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \operatorname{sen}\phi \\ 0 & -\operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{pmatrix}, \qquad \text{per qualche } \phi \in \mathbf{R}.$$

   Poiché $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A')$, troviamo che $\mathrm{Tr}(A) = 1 + 2\cos\phi$. Dal fatto che $|\cos\phi| \leq 1$ per ogni $\phi \in \mathbf{R}$, segue che $|1 + 2\cos\phi| \leq 3$ come richiesto.