Geometria (Schoof) 1^o appello 31 gennaio 2025, ore 14:00–16:00.

COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 5 punti.

1. Determinare la distanza fra le rette r ed s in $\mathbf{R}^3$, date da

$$r: \quad \begin{cases} y &= 0, \\ x+z &= -1. \end{cases} \qquad\qquad s: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ (t \in \mathbf{R}).$$

2. Sia $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ la rotazione (in senso antiorario) di un angolo di 60 gradi intorno al punto $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Calcolare $f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Sia W il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ di equazione $x_1+x_2 = x_3+x_4$. Esibire una base ortonormale di W.

4. Sia $f : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^4$ l'applicazione data da $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Calcolare una base del sottospazio $W = \ker(f) \cap \mathrm{Im}(f)$.

5. Determinare una trasformazione ortogonale di $\mathbf{R}^3$ che diagonalizzi la forma quadratica $X^2 + 4XZ - Y^2 + Z^2$.

6. Sia $n \geq 1$ e sia A una matrice complessa $n \times n$. Supponiamo che A sia unitaria ed Hermitiana. Determinare gli autovalori di A.

Soluzioni.

1. Un'equazione parametrica della retta r è data da $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $(u \in \mathbf{R})$ Il piano π che contiene la retta s ed è parallelo alla retta r ha equazione parametrica

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (t, u \in \mathbf{R}).$$

Un'equazione cartesiona di π è data da $x - 2y + z = 2$. La distanza fra le rette r e s è uguale alla distanza di un qualsiasi punto P di r e il piano π. Scelgendo $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, troviamo che la distanza cercata è uguale a $\frac{|1\cdot -1 - 2\cdot 0 + 1\cdot 0 - 2|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{1}{2}\sqrt{6}$.

2. Sia $T : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ la traslazione di passo $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e sia R la rotazione (in senso antiorario) di un angolo di 60 gradi intorno all'origine. Allora si ha che $f = TRT^{-1}$. La mappa R è lineare ed è data dalla moltiplicazione per la matrice $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ con $\theta = \pi/3$. Si ha che

$$f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = TRT^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = TR\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

3. È facile vedere che i vettori $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ appartengo a W e sono ortogonali. Completiamo $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ ad una base ortogonale di W. Poiché $\dim W = 3$, cerchiamo quindi un terzo vettore $\mathbf{v}_3 \in W$ con $\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 \rangle = \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2 \rangle = 0$. Le coordinate x_1, x_2, x_3, x_4 di $\mathbf{v}_3$ sono quindi soluzioni del sistema lineare omogeneo con matrice dei coefficienti

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le soluzioni sono i multipli del vettore $\mathbf{v}_3 = (1, 1, 1, 1)$. I vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ formano quindi una base ortogonale di W e i vettori

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2}\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

formano una base ortonormale di W.

4. Questo è l'esercizo 6 (a) del foglio 7.
5. Questo è l'esercizo 2 (b) del foglio 14.
6. Sia $\lambda \in \mathbf{C}$ un autovalore di A. Poiché A è unitaria, si ha che $|\lambda| = 1$. Il fatto che A è Hermitiana implica che λ è in $\mathbf{R}$. Ne segue che $\lambda = \pm 1$. Gli autovalori di A formano quindi un sottoinsieme L di $\{-1, +1\}$. Se L fosse un sottoinsieme proprio, allora si avrebbe che $L = \{+1\}$ oppure $L = \{-1\}$, in quel caso $A = \pm \mathrm{Id}$.