Geometria (Schoof) $\qquad$ 6^o appello $\qquad$ 21 settembre 2023, ore 14:00–16:00.

COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 5 punti.

1. Sia r la retta di equazione $x+y=1$ in $\mathbf{R}^2$. Applicare la rotazione di 90 gradi nel senso antiorario intorno al punto $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. Scrivere un'equazione cartesiana per l'immagine di r.

2. Sia S la sfera di equazione $x^2+(y-2)^2+(z+1)^2=4$ in $\mathbf{R}^3$ e sia r la retta di equazione cartesiana:
$$\begin{cases} 2x+y-4=0, \\ -x+z+1=0. \end{cases}$$
   (a) Determinare i punti d'intersezione di S con r.
   (b) Scrivere l'equazione del piano tangente alla sfera in uno dei punti di intersezione.

3. Sia π il piano in $\mathbf{R}^3$ di equazione $x+2y-2z=3$. Determinare equazioni cartesiane dei piani paralleli a π, che sono a distanza 3 da π.

4. Esibire, se esiste, una matrice ortogonale 3×3 con la prima riga uguale a $(\frac{1}{3}\ \frac{2}{3}\ \frac{2}{3})$.

5. Sia $W\subset \mathbf{R}^4$ il sottospazio di equazione $x_1+x_2+x_3+x_4=0$. Sia $f: W \longrightarrow W$ l'applicazione che scambia la prima e la seconda coordinata.
   (a) Dimostrare che f è lineare.
   (b) Calcolare il polinomio caratteristico della matrice rappresentativa di f rispetto ad una base a scelta di W.

6. Sia A la seguente matrice 11×11
$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   Determinare gli autovalori di A e le rispettive molteplicità algebrica e geometrica.

Soluzioni.

1. Facciamo una traslazione T di passo $\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$. L'immagine di r è la retta r' di equazione $x+y=-1$, mentre l'immagine del punto $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ è l'origine. La rotazione di 90 gradi intorno all'origine è data dalla moltiplicazione per $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Scegliamo due punti su r', per

esempio $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Moltiplicandoli per A otteniamo i punti $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. La retta r'' per questi due punti è data da $x - y = 1$. La traslazione T^{-1} porta r'' nella retta cercata, che coincide con r'' stessa.

2. Questo è una parte dell'esercizio 2 del foglio 7.
3. Sia $P \in \pi$ il punto $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Il vettore $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ è un vettore normale a π di lunghezza 3.

   I due piani cercati passano quindi per $P + \mathbf{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ e per $P - \mathbf{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ e hanno rispettivamente equazione $x + 2y - 2z = 12$ e $x + 2y - 2z = -6$.
4. Le righe della matrice cercata formano una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$. Si può completare la riga data ad una base di $\mathbf{R}^3$ e successivamente ortonormalizzarla. Ecco un esempio

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Controllare la linearità di f è standard. Per la parte (b), osserviamo che i vettori

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   formano una base di W. Si ha che $f(\mathbf{e}_1) = -\mathbf{e_1}$, $f(\mathbf{e_2}) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ e $f(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3$. La matrice rappresentativa rispetto a questa base è quindi

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   con polinomio caratteristico $(\lambda + 1)(\lambda - 1)^2$.
6. Questo è una caso particolare dell'esercizio 6 del foglio 13.