COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 5 punti.

1. Sia data la conica di equazione $X^2 + 2XY + Y^2 - X - Y = 0$ in $\mathbf{R}^2$. Determinarne il tipo.

2. Determinare autovalori e autovettori della matrice Hermitiana $\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$.

3. Siano date le due rette r_1 e r_2 di equazioni parametriche

$$r_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, (t \in \mathbf{R}), \quad r_2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, (s \in \mathbf{R})$$

   Far vedere che r_1 e r_2 si incontrano in un punto e scrivere un'equazione cartesiana del piano passante per r_1 e r_2.

4. Sia π il piano di equazione $x+2y+z = 3$ in $\mathbf{R}^3$ e sia r la retta di equazione parametrica

$$r : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ (t \in \mathbf{R}).$$

   Determinare un'equazione parametrica della retta s, proiezione ortogonale di r su π.

5. Sia V il piano in $\mathbf{R}^3$ di equazione $x + y + z = 0$. Sia $f : V \longrightarrow V$ l'applicazione che cambia i segni delle coordinate dei vettori. Far vedere che f è lineare. Determinare una matrice rappresentativa di f e calcolarne traccia e determinante.

6. Sia $f : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare data dalla moltiplicazione per la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

   Determinare una base ortonormale dell'immagine di f.

Soluzioni.

1. Poiché si ha che $X^2 + 2XY + Y^2 - X - Y = (X + Y)(X + Y - 1)$, si tratta delle due rette parallelle di equazioni $X + Y = 0$ e $X + Y = 1$.

2. Il polinomio caratteristico è $X^2 - 1$ e quindi gli autovalori sono $+1$ e -1 con autovettori $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ rispettivamente $\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$.
3. Questo è una parte dell'esercizio 4 del foglio 6.
4. Sia P il punto di intersezione $r \cap \pi$. Sia ha che $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Sia Q la proiezione ortogonale su π del punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ della retta r. La retta cercata è quella che passa per P e Q. Il punto Q è l'intersezione di π e la retta di equazione $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ con $\sigma \in \mathbf{R}$. Si trova che Q è uguale a $\begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$. Un'equazione parametrica della retta cercata è $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ con $\tau \in \mathbf{R}$.
5. Questo è l'esercizio 2 del foglio 10.
6. L'immagine di f è lo span di $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Una base ortonormale è data dai vettori $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$