

COGNOME

NOME

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 5 punti.

1. Determinare una trasformazione ortogonale di $\mathbf{R}^3$ che diagonalizzi la forma quadratica $2X^2 + 2XY + 2XZ + 2Y^2 + 2YZ + 2Z^2$.
2. Siano $P = (1, 2, 4)$, $Q = (2, 4, 1)$ e $R = (4, 1, 2)$ tre punti in $\mathbf{R}^3$. Calcolare l'area del triangolo con vertici P , Q e R .
3. Sia π il piano in $\mathbf{R}^3$ di equazione $x + 2y + 2z = 4$ e sia $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ la simmetria rispetto a π . Sia P il punto $(0, 0, 0)$. Calcolare le coordinate di $f(P)$.
4. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n dotato di prodotto scalare $\langle -, - \rangle$. Sia $\mathbf{v} \in V$ un vettore con $\|\mathbf{v}\| = 1$. Definiamo la mappa lineare $f : V \rightarrow V$ mediante

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \langle \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} \rangle \mathbf{v}, \quad \text{per } \mathbf{x} \in V.$$

- (a) Far vedere che $f^2 = f$. (con f^2 indichiamo la funzione composta $f \circ f$)
 - (b) Determinare le dimensioni del nucleo e dell'immagine di f .
5. Sia $f : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^2$ l'applicazione lineare data da

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}.$$

Sia W il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ di equazione $x_2 + x_4 = 0$.

- (a) Dimostrare che $\ker f \subset W$;
 - (b) esibire un complemento di $\ker f$ dentro W .
6. Calcolare il determinante della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soluzioni.

1. Questo è l'esercizio 2 del foglio 14.
2. Traslo i punti di passo $-(1, 2, 4)$. Allora l'area cercata è uguale all'area del triangolo Δ con vertici $P' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Q' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ e $R' = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Il vettore $S = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è perpendicolare

al piano passante per P' , Q' e R' ed ha lunghezza 1. Il *volume* del parallelepipedo $\Pi = \{\alpha Q' + \beta R' + \gamma S : \alpha, \beta, \gamma \in [0, 1]\}$ è quindi uguale al doppio dell'area cercata. Troviamo che

$$\text{area}(\Delta) = \frac{1}{2} \text{vol}(\Pi) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{7}{2} \sqrt{3}$$

Alternativamente, si osserva che il triangolo è equilatero. Ogni lato ha lunghezza $\sqrt{14}$. Dalla geometria elementare si sa che l'area di un triangolo equilatero con lati di lunghezza a , è uguale a $\frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3}a$. In questo caso diventa $\frac{14}{4} \sqrt{3}$.

3. La retta l passante per il punto $(0, 0, 0)$ e ortogonale al piano π ha equazione parametrica

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, (t \in \mathbf{R})$. Il punto di intersezione $l \cap \pi$ corrisponde al valore del parametro t che soddisfa $t + 4t + 4t = 4$ e quindi $t = 4/9$. Il punto $f(P)$ corrisponde a $t = 8/9$. In altre parole, si ha che $f(P) = \begin{pmatrix} 8/9 \\ 16/9 \\ 16/9 \end{pmatrix}$.

4. Questo è l'esercizio 6 del foglio 11.

5. Se un punto P sta nel nucleo, le sue coordinate x_1, x_2, x_3, x_4 soddisfano $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ e $x_1 + x_3 = 0$. Sottraendo le due equazioni si trova che $x_2 + x_4 = 0$. In altre parole, P sta in W . (b) Poiché $\dim W = 3$ mentre $\dim \ker f = 2$, ogni complemento è generato da un

vettore di W che non sta in $\ker f$. Per esempio il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

6. Si tratta di un calcolo standard. Il valore del determinante è 8. Nell'altra versione del compito è 5.