COGNOME

NOME

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 5 punti.

1. Esibire una base ortonormale del sottospazio di $\mathbf{R}^4$ dato dall'equazione cartesiana $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$.
2. Determinare la distanza fra le rette r ed r' in $\mathbf{R}^3$, date da

$$r : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (t \in \mathbf{R}), \quad r' : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (s \in \mathbf{R}).$$

3. Sia z il numero complesso $2 + i$. Determinare la parte reale di $\frac{\bar{z}+1}{z+1}$.
4. Siano W e W' i due sottospazi di $\mathbf{R}^4$ dati da

$$W = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad W' = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Calcolare la dimensione di $W \cap W'$.

5. Sia $W \subset \mathbf{R}^3$ un piano passante per l'origine. Sia $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ la riflessione rispetto al piano W . Si sa che f è un'applicazione lineare. Calcolare la traccia di f .
6. Sia A la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calcolare A^{100} .

Soluzioni.

1. Questo è l'esercizio 9 del foglio 10.
2. Il piano π di equazione $x - y + z = 1$ contiene r ed è parallela a la retta r' . La distanza fra r ed r' è quindi uguale alla distanza del punto $P = (2, 0, 0)$ dal piano π . Questa distanza è data dalla formula $|2 - 0 + 0 - 1|/\sqrt{3} = 1/\sqrt{3}$.
3. Abbiamo che $W' \subset W$. Infatti, il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ di W' è uguale a $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. La dimensione di $W \cap W'$ è quindi uguale a $\dim W' = 2$.
4. La parte reale di $\frac{3-i}{3+i}$ è uguale alla parte reale di $\frac{1}{10}(3-i)^2 = \frac{1}{10}(8-6i) = \frac{4}{5}$.
5. Questo è l'esercizio 5 del foglio 13.
6. La matrice A ha un autovalore uguale a 1 di molteplicità algebrica 2. L'autospazio ha dimensione 1 ed è generato dal vettore $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Scelgo $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, un vettore indipendente

da $\mathbf{v}_1$. Allora i vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ formano una base di $\mathbf{R}^2$. Sia $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ la moltiplicazione per la matrice A . Poiché $A\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1$ e $A\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$, la matrice rappresentativa di f rispetto alla base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ è uguale a $A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. È facile vedere che $A'^k = \begin{pmatrix} 1 & -k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ per ogni $k \in \mathbf{Z}$. La matrice del cambiamento di base è $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Si ha quindi che $A^k = BA'^k B^{-1}$ per ogni $k \in \mathbf{Z}$ ed in particolare che $A^{100} = \begin{pmatrix} -99 & -100 \\ 100 & 101 \end{pmatrix}$.