Geometria (Schoof) $2^o$ appello 17 febbraio 2023, ore 14:00–16:00.

*COGNOME* .............................. *NOME* ........................

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 5 punti.

1. Sia $C$ la circonferenza in $\mathbf{R}^2$ di equazione $(x-1)^2+(y+1)^2=4$ e sia $P$ il punto $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Determinare equazioni cartesiane delle due rette tangenti a $C$ e passanti per $P$.
2. Determinare la distanza fra le rette $r$ ed $r'$ in $\mathbf{R}^3$, date da
$$r:\quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ (t\in\mathbf{R}),\qquad r':\quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ (s\in\mathbf{R}).$$
3. Sia $W\subset\mathbf{R}^3$ il sottospazio di equazione $x+y+z=0$ e sia $W'=\mathrm{Span}(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix})$. Esibire una base di $W\cap W'$.
4. Sia $t\in\mathbf{R}$ e sia $C$ la conica di equazione $X^2+4XY+4Y^2-2X-4Y=t$. Esibire, se esiste, un valore di $t$ in modo che l'equazione di $C$ definisca
   (a) una parabola;
   (b) una retta;
   (c) due rette.
5. Sia $\mathbf{v}$ un vettore non nullo in $\mathbf{R}^3$. Sia $f:\mathbf{R}^3\longrightarrow\mathbf{R}^3$ l'applicazione data da $f(\mathbf{x})=\mathbf{x}\times\mathbf{v}$ (prodotto vettoriale).
   (a) Dimostrare che $f$ è lineare.
   (b) Determinare le dimensioni del nucleo e dell'immagine di $f$.
6. Sia $A$ la matrice $\begin{pmatrix}7&3\\2&2\end{pmatrix}$. Calcolare $A^{100}$.

**Soluzioni.**

1. Questo è l'esercizo 1 del foglio 7.
2. Le due rette sono parallele. Scelgo un piano $\pi$ ortogonale ad $r$ e $r'$. Per esempio il piano di equazione $x+y+z=0$. L'intersezione $r\cap\pi$ è il punto $P=(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$, mentre l'intersezione $r'\cap\pi$ è il punto $Q=(\frac{4}{3},\frac{-2}{3},\frac{-2}{3})$. La distanza fra $r$ ed $r'$ è quindi uguale $\|P-Q\|=\sqrt{(\frac{2}{3})^2+(\frac{1}{3})^2+(\frac{1}{3})^2}=\sqrt{6}/3=\sqrt{2/3}$.
4. Ogni vettore $\mathbf{x}$ in $W'$ ha la forma $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}s\\2s+2t\\t\end{pmatrix}$ per certi $s,t\in\mathbf{R}$. Il vettore $\mathbf{x}$ sta anche in $W$ se e solo se $s+2(s+t)+t=0$, ossia $t=-s$. Ne segue che ogni vettore in $W\cap W'$ ha la forma $\mathbf{x}=s\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ per un $s\in\mathbf{R}$. Una base di $W\cap W'$ è quindi data dal vettore $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

3. Si ha che $X^2 + 4XY + 4Y^2 - 2X - 4Y = (X + 2Y - 1)^2 - 1$. La conica è quindi data dall'equazione $(X + 2Y - 1)^2 = t + 1$. Se $t > -1$, si tratta di due rette parallele, per $t = -1$ di una retta e per $t < -1$ dell'insieme vuoto. Quindi (a) non è possibile, il caso (b) accade per $t = -1$ e il caso (c) per esempio per $t = 0$.
5. Questo è l'esercizo 4 del foglio 10.
6. Sia $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ la moltiplicazione per $A$. Calcoliamo la matrice rappresentativa di $f$ rispetto ad una base di autovettori di $f$. Gli autovalori sono $\lambda = 1$ con autospazio uguale allo span di $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\lambda = 8$ con autospazio uguale allo span di $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dal solito diagramma commutativo troviamo la relazione $AB = BD$, dove $D$ è la matrice diagonale $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ e $B$ è la matrice del cambiamento di base $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Per lo stesso motivo abbiamo che $A^{100}B = BD^{100}$. Poichè $D^{100}$ è ovviamente uguale a $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8^{100} \end{pmatrix}$, troviamo che

$$A^{100} = BD^{100}B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 + 6 \cdot 8^{100} & -3 + 3 \cdot 8^{100} \\ -2 + 2 \cdot 8^{100} & 6 + 8^{100} \end{pmatrix}.$$