

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali*. Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 5 punti.

1. Determinare una trasformazione ortogonale di $\mathbf{R}^3$ che diagonalizzi la forma quadratica

$$X^2 + 4XZ - Y^2 + Z^2.$$

2. In $\mathbf{R}^3$ siano dati il punto P e il piano π :

$$P = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \pi : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, (t, s \in \mathbf{R}).$$

Calcolare la distanza di P da π .

3. Siano $P = (2, 5)$, $Q = (1, -10)$ ed $R = (-4, 7)$ in $\mathbf{R}^2$. Determinare l'area del triangolo PQR .

4. Sia A la matrice complessa $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2+i & 0 \end{pmatrix}$. Determinare A^{-1} (portare le coordinate di A^{-1} nella forma $a + bi$, con $a, b \in \mathbf{R}$).

5. Siano $W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : \begin{cases} x_1 + x_2 = 0; \\ x_2 + x_3 = 0. \end{cases} \right\}$ e $W' = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ due sottospazi di $\mathbf{R}^3$.

Esibire una base ortonormale della somma $W + W'$.

6. Sia $V \subset \mathbf{R}^3$ il sottospazio di equazione $x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$. Sia $f : V \rightarrow V$

l'applicazione lineare data da $f \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -x_3 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$, per $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V$.

Esibire una base di V e determinare la matrice rappresentativa A di f rispetto a tale base. Calcolare il polinomio caratteristico di A .

Soluzioni.

1. Questo è l'esercizio 2 del foglio 14.
 2. Questo è l'esercizio 2 del foglio 6.
 3. Traslare il triangolo di passo $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ non cambia l'area. Il risultato è un triangolo che passa per l'origine

e i punti $(-1, -14)$ e $(-6, 2)$. L'area è la metà del valore assoluto di $\det \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ -14 & 2 \end{pmatrix}$, vale dire 43.

4. La matrice inversa è $\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i \\ 1 & -\frac{4}{5} + \frac{2}{5}i \end{pmatrix}$.

5. Un'equazione parametrica per W è data da $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, ($t \in \mathbf{R}$). Allora $W + W'$ è lo span di

$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Una base ortonormale è data da $\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

6. Scelgo come base di V i vettori $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Allora si ha che $f(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\mathbf{v} + \mathbf{w}$

e $f(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2\mathbf{v} + \mathbf{w}$. La matrice rappresentativa rispetto alla base $\{\mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ è quindi data da

$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Il suo polinomio caratteristico è $X^2 + 1$.