

1. Quali V sono spazi vettoriali?

(a) $V = \mathbf{R}^2$ con la solita somma fra vettori e con prodotto definito da

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{per ogni } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \text{ ed ogni } \lambda \in \mathbf{R}$$

(b) $V = \{x \in \mathbf{R} : x > 0\}$ con addizione “ $\oplus$ ” e moltiplicazione “ $\otimes$ ” definite da

$$\begin{aligned} x \oplus y &= xy; & \text{per ogni } x, y \in V, \\ \lambda \otimes x &= x^\lambda; & \text{per ogni } x \in V, \lambda \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

2. Disegnare i seguenti sottoinsiemi di $\mathbf{R}^2$ e controllare se sono sottospazi lineari:

$$(a) \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_1 = 2x_2 \right\} \subset \mathbf{R}^2, \quad (c) \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_1 = 2 \right\} \subset \mathbf{R}^2,$$

$$(b) \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_1 > 0 \right\} \subset \mathbf{R}^2, \quad (d) \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : x_1 = x_2 = 0 \right\} \subset \mathbf{R}^2.$$

3. Decidere se sono sottospazi o meno i seguenti sottoinsiemi di $\mathbf{R}^3$.

$$(a) W = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : 0 < t < 1 \right\}, \quad (c) W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$(b) W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : |x - 2y + z| = 0 \right\}, \quad (d) W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 0 \right\}.$$

4. Sia W il sottospazio di $\mathbf{R}^4$ dato da

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 : \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 3x_3 + 2x_4 &= 0 \end{cases} \right\}.$$

Decidere se $W = \{\mathbf{0}\}$ o meno.

5. Scrivere i seguenti sottospazi W come $\text{Span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r)$ per dei vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$.

$$(a) W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^5 : \begin{cases} x_1 &+& x_2 &-& x_3 &= 0 \\ &2x_2 &+& x_3 &= 0 \end{cases} \right\} \subset \mathbf{R}^5;$$

$$(b) W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 : x_1 + 2x_3 = 0 \right\} \subset \mathbf{R}^4.$$

6. Sia V uno spazio vettoriale e sia $\mathbf{0} \in V$ il vettore zero.

(a) Dimostrare che $\lambda \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$.

(b) Siano $\mathbf{v} \in V$ e $\lambda \in \mathbf{R}$. Dimostrare che se $\lambda \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$, allora $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ oppure $\lambda = 0$.