

1. Delle matrici degli esercizi 3 e 4 del foglio 12 dire se sono diagonalizzabile o meno.

2. Sia B la matrice simmetrica

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esibire una base ortonormale di autovettori di B e dire se B è diagonalizzabile o meno.

3. Siano $a, b, d \in \mathbf{R}$ e sia A la matrice simmetrica data da $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$.

(a) Calcolare il polinomio caratteristico di A e verificare che i suoi zeri sono in \mathbf{R} .

(b) Esibire una base ortonormale di \mathbf{R}^2 di autovettori di A .

4. Sia $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calcolare A^{1000} .

5. Sia $W \subset \mathbf{R}^3$ un piano passante per l'origine. Sia $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ la riflessione rispetto al piano W . Si sa che f è un'applicazione lineare. Calcolare la traccia di f .

6. Per $n \geq 1$, sia A la seguente matrice $n \times n$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per ogni $n \geq 1$ determinare gli autovalori di A e loro molteplicità algebriche e geometriche.

7. Determinare il polinomio caratteristico della tavola pitagorica

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 & 18 & 20 \\ 3 & 6 & 8 & 12 & 15 & 18 & 21 & 24 & 27 & 30 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 & 24 & 28 & 32 & 36 & 40 \\ 5 & 10 & 15 & 20 & 25 & 30 & 35 & 40 & 45 & 50 \\ 6 & 12 & 18 & 24 & 30 & 36 & 42 & 48 & 54 & 60 \\ 7 & 14 & 21 & 28 & 35 & 42 & 49 & 56 & 63 & 70 \\ 8 & 16 & 24 & 32 & 40 & 48 & 56 & 64 & 72 & 80 \\ 9 & 18 & 27 & 36 & 45 & 54 & 63 & 72 & 81 & 90 \\ 10 & 20 & 30 & 40 & 50 & 60 & 70 & 80 & 90 & 100 \end{pmatrix}.$$

8. Siano A e B due matrici $n \times n$ con coefficienti reali. Dimostrare che

$$\text{rango}(A) + \text{rango}(B) \geq \text{rango}(A + B).$$

Dare un esempio per cui vale l'uguaglianza ed un esempio per cui vale la disuguaglianza stretta.