

1. Controllare se i vettori $\begin{pmatrix} 2/7 \\ 3/7 \\ 6/7 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 6/7 \\ 2/7 \\ -3/7 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3/7 \\ -6/7 \\ 2/7 \end{pmatrix}$ formano una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$.
2. Sia $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4$. L'insieme dei vettori di $\mathbf{R}^4$ ortogonali a $\mathbf{v}$ formano un sottospazio U di $\mathbf{R}^4$, detto *complemento ortogonale* di $\text{Span}(\mathbf{v})$.
 - (a) Determinare la dimensione di U
 - (b) Esibire due elementi di U che siano ortogonali fra loro. Posso trovarne tre? quattro?
3. Siano dati i vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$.
 - (a) Far vedere che formano una base di $\mathbf{R}^3$.
 - (b) Ortonormalizzarla col metodo di Gram-Schmidt.
 - (c) Calcolare le coordinate del vettore $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ rispetto alla base ortonormale così ottenuta.
4. Ortonormalizzare i vettori $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $\mathbf{R}^4$. Determinare il complemento ortogonale del sottospazio $W = \text{span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ in $\mathbf{R}^4$ esibendone una base.
5. Sia dato il sottospazio $W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 \mid \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases} \right\}$ e sia $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4$.
 - (a) Determinare la distanza di P da W .
 - (b) Determinare una base del complemento ortogonale $W^\perp$ di W in $\mathbf{R}^4$.
 - (c) Scomporre P come somma di vettori $P = P_W + P_{W^\perp}$, con $P_W \in W$ e $P_{W^\perp} \in W^\perp$.
6. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n dotato di prodotto scalare $\langle -, - \rangle$. Sia $\mathbf{v} \in V$ un vettore con $\|\mathbf{v}\| = 1$. Definiamo $f : V \rightarrow V$ mediante

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \langle \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} \rangle \mathbf{v}, \quad \text{per } \mathbf{x} \in V.$$
 - (a) Dimostrare che f è lineare.
 - (b) Far vedere che $f^2 = f$. (con f^2 indichiamo la funzione composta $f \circ f$)
 - (c) Determinare le dimensioni del nucleo e dell'immagine di f .
 - (d) Geometricamente cosa fa f ?