

COGNOME

NOME

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali*. Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 5 punti.

1. Sia S la sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z$. Sia π il piano di equazione $x + y + 2z - 1 = 0$. Verificare che l'intersezione fra π ed S è una circonferenza e calcolarne il raggio.
 2. Calcolare l'area del triangolo PQR dove P , Q ed R sono i punti in $\mathbf{R}^2$ dati da $P = (4, 1)$, $Q = (7, 6)$ e $R = (9, 9)$.
 3. Sia Q la quadrica in $\mathbf{R}^3$ data da $XY + YZ + ZX = 0$. Dire di che tipo si tratta.
 4. Sia $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare che fissa $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, ma scambia i due vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Determinare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica.
 5. (a) Sia $c \in \mathbf{R}$ e sia $A = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcolare A^{100} .
(b) Sia $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. Calcolare B^{100} .
 6. Siano dati i punti $(t, s) \in \mathbf{R}^2$: $(0, -2)$, $(1, -1)$, $(2, -1)$, $(3, 0)$, $(4, 1)$. Col metodo dei minimi quadrati, determinare la retta che passa più vicina a tali punti.
-
1. Il centro della circonferenza S è $C = (1/2, 1/2, 1/2)$ mentre il suo raggio è $r = \sqrt{3/4}$. La distanza di C da π è $|1/2 + 1/2 + 1 - 1|/\sqrt{6} = 1/\sqrt{6}$. Dal fatto che $1/\sqrt{6} < r$, segue che l'intersezione $S \cap \pi$ è una circonferenza. Con il teorema di Pitagora si trova che il suo raggio è $\sqrt{3/4 - 1/6} = \sqrt{7/12}$. Nell'altra versione del compito il raggio è $1/\sqrt{12}$.
 2. L'area del triangolo PQR è uguale a quella di $OQ'R'$ dove O , Q' , R' sono le traslazioni dei punti P , Q , R di passo $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Si ha quindi che $O = (0, 0)$, $Q' = (3, 3)$ e $R' = (5, 8)$. L'area cercata è quindi uguale a $|\frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}| = \frac{1}{2}$. Nella altra versione del compito l'area è zero.
 3. Questo è l'esercizio 5 (g, h) del foglio 16.

4. Questo esercizio si fa con un calcolo standard. Il risultato è $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2/5 & 4/5 & -2/5 \\ 6/5 & 3/5 & -4/5 \end{pmatrix}$. Nell'altra

versione del compito il risultato è $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & -1/2 & 3/4 \\ -1/2 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$.

5. Dal fatto che per $c, d \in \mathbf{R}$ il prodotto $\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è uguale a $\begin{pmatrix} 1 & c+d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, segue

che $\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^M = \begin{pmatrix} 1 & Mc \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ per ogni $M \in \mathbf{Z}$. La matrice B della parte (b) ha un unico autovalore $\lambda = 1$ con molteplicità geometrica uguale 1. Esattamente come la matrice A della parte (a). Facendo un cambiamento di base, è possibile calcolare B^{100} usando il risultato della parte (a). Alternativamente, si scrive $B = \text{id} + C$ dove C è la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$.

Dal fatto che C^2 è la matrice zero, segue, con il binomio di Newton, che

$$B^{100} = (\text{id} + C)^{100} = \text{id} + 100C = \begin{pmatrix} 201 & 200 \\ -200 & -199 \end{pmatrix}.$$

6. Questo è l'esercizio 4 del foglio 14.