

COGNOME

NOME

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali*. Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 5 punti.

1. Sia C la circonferenza in $\mathbf{R}^2$ di raggio 2, centrata in $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Calcolare equazioni delle tangenti a C uscenti dal punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.
2. Disegnare la conica in $\mathbf{R}^2$ di equazione $2X^2 + 4XY + 5Y^2 - 4X - 4Y + 2 = 0$.
3. Siano r_1, r_2, r_3 le tre rette nel piano proiettivo $\mathbf{P}_2$ di equazioni $x_1 + x_2 = 0$, $x_0 + x_2 = 0$ e $2x_0 + x_1 + 3x_2 = 0$, rispettivamente. Decidere se r_1, r_2 e r_3 passano o meno per un unico punto di $\mathbf{P}_2$.
4. Calcolare la traccia della matrice $\begin{pmatrix} \cos(\pi/8) & -\sin(\pi/8) \\ \sin(\pi/8) & \cos(\pi/8) \end{pmatrix}^{1000}$.
5. Sia π il piano in $\mathbf{R}^3$ di equazione $5x + 4y + 3z = 0$. Sia $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ la proiezione ortogonale su π . Determinare il polinomio caratteristico della mappa lineare f .
6. Siano dati i punti $(t, s) \in \mathbf{R}^2$:

$$(0, -2), \quad (1, -1), \quad (2, -1), \quad (3, 0), \quad (4, 1).$$

Col metodo dei minimi quadrati, determinare la retta che passa più vicina a tali punti.

1. Facendo un disegno, è ovvio che le rette tangenti non sono verticali e hanno quindi equazioni del tipo $y = \lambda x + 4$ per qualche $\lambda \in \mathbf{R}$. Il fatto che la distanza del centro di C dalla retta tangente è uguale al raggio, ci dice che $|\lambda 3 + 4 - 2|/\sqrt{1 + \lambda^2} = 2$ e quindi $5\lambda^2 + 12\lambda = 0$. Ne segue che $\lambda = 0$ oppure $\lambda = -12/5$.
2. Questo è l'esercizio 3 (f) del foglio 15.
3. L'unica soluzione del sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= 0 \\ 2x_0 + x_2 &= 0 \\ 2x_0 + x_1 + 3x_2 &= 0 \end{cases}$$

è la soluzione nulla. Visto che le coordinate di un punto di $\mathbf{P}_2$ non possono essere tutte nulle, le tre rette non passano per uno stesso punto. Nell'altra versione invece, le soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_0 + x_2 &= 0 \\ 2x_0 + x_1 + 3x_2 &= 0 \end{cases}$$

formano una retta in $\mathbf{R}^3$. Infatti, l'unico punto di intersezione in $\mathbf{P}_2$ è $(1 : 1 : -1)$.

4. Poiché la matrice $\begin{pmatrix} \cos(\pi/8) & -\sin(\pi/8) \\ \sin(\pi/8) & \cos(\pi/8) \end{pmatrix}$ rappresenta una rotazione di angolo $\pi/8$ intorno l'origine, la sua M -esima potenza è uguale a $\begin{pmatrix} \cos(M\pi/8) & -\sin(M\pi/8) \\ \sin(M\pi/8) & \cos(M\pi/8) \end{pmatrix}$ ed ha traccia uguale a $2\cos(M\pi/8)$. Poiché la funzione coseno è periodica modulo 2π troviamo che per $M = 100$ la traccia è $2\cos(\pi/2) = 0$, mentre per $M = 1000$ la traccia è $2\cos(\pi) = -2$.
5. La matrice rappresentativa di una proiezione ortogonale su un piano in $\mathbf{R}^3$ è diagonalizzabile. Gli autovalori sono 0, +1 e +1. Il polinomio caratteristico è quindi uguale a $X(X - 1)^2$. Similmente, la matrice rappresentativa di una riflessione rispetto ad un piano in $\mathbf{R}^3$ è diagonalizzabile. Gli autovalori sono -1, +1 e +1. Il polinomio caratteristico è quindi uguale a $(X + 1)(X - 1)^2$.
6. Questo è l'esercizio 4 del foglio 14.