GEOMETRIA (Schoof) 4^o appello Roma, 13 luglio 2015, ore 14:00–16:00.

COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 5 punti.

1. Sia C la circonferenza in $\mathbf{R}^2$ di raggio $\sqrt{2}$ centrata in $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Calcolare equazioni delle tangenti a C uscenti dal punto $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2. Siano dati i punti $P = (1 : 0 : 2)$ e $Q = (0 : 2 : 1)$ nel piano proiettivo $\mathbf{P}_2$. Sia r la retta passante per P e Q. Calcolare $r \cap s$ dove s è la retta di equazione $x_0 + x_1 - x_2 = 0$.

3. Determinare tutte le soluzioni complesse del seguente sistema lineare
$$\begin{cases} ix & +y & -2z & = -1, \\ x & -iy & +(1+i)z & = i. \end{cases}$$

4. Calcolare l'area dell'ellisse in $\mathbf{R}^2$, di equazione $X^2 + 3XY + 5Y^2 + X + 3Y = 0$.

5. Siano date l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$, definita da $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-z \\ z-x \\ x-y \end{pmatrix}$, e la base $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ di $\mathbf{R}^3$. Determinare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ (nello spazio di partenza e in quello di arrivo).

6. Sia r una retta in $\mathbf{R}^3$ passante per l'origine. Sia $g : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ la rotazione di angolo φ intorno ad r. Supponiamo che la traccia dell'applicazione lineare g sia zero. Determinare φ.

1. Questo è l'esercizio 4 (a) del foglio 5.
2. La retta r è data dall'equazione $4x_0 + x_2 - 2x_2 = 0$. Il punto di intersezione con s è $(1 : 2 : 3)$.
3. Usando il metodo di Gauss si trova che $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}$ con $t \in \mathbf{C}$.
4. Gli autovalori della matrice simmetrica associata alla forma quadratica $X^2 + 3XY + 5Y^2$ sono $\lambda = 1/2$ e $\lambda = 11/2$. Il cambiamento ortogonale di variabili $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}$

porta la conica in "forma diagonale" $\frac{1}{2}X'^2 + \frac{11}{2}Y'^2 + \sqrt{10}Y' = 0$. La traslazione $X'' = X'$, $Y'' = Y' + \frac{\sqrt{10}}{11}$ porta la conica nella forma $\frac{1}{2}X''^2 + \frac{11}{2}Y''^2 = \frac{5}{11}$ senza cambiare l'area dell'ellisse. L'area della ellisse è quindi uguale a $\pi\sqrt{10/11 \cdot 10/11^2} = 10\pi/11\sqrt{11}$.

5. Questo è l'esercizio 4 del foglio 12.
6. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi \\ 0 & -\operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ è una matrice rappresentativa di g. Se la traccia di g è zero, abbiamo che $1 + 2\cos\varphi = 0$ e quindi $\varphi = \pm 2\pi/3$.