GEOMETRIA (Schoof) 3^o appello Roma, 30 giugno 2015, ore 14:00–16:00.

COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 5 punti.

1. Calcolare la distanza fra le rette r ed s in $\mathbf{R}^3$, di equazioni

$$r : \begin{cases} x + y = 0; \\ y + 2z = 1; \end{cases} \qquad s : \begin{cases} y + z = 0; \\ x + 2y = 1. \end{cases}$$

2. Siano r_1, r_2, r_3 le tre rette nel piano proiettivo $\mathbf{P}_2$ di equazioni $x_0+x_2 = 0$, $3x_1+x_2 = 0$ ed $x_0 + 2x_1 + 3x_2 = 0$, rispettivamente. Decidere se r_1, r_2 e r_3 passano o meno per uno stesso punto di $\mathbf{P}_2$.

3. Disegnare la conica in $\mathbf{R}^2$ di equazione $2X^2 - 3XY - 2Y^2 - X + 2Y = 0$.

4. Sia $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ l'applicazione lineare che scambia $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Determinare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$.
   (b) Determinare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica.

5. Sia $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$ un vettore non nullo. Sia $g : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ la mappa data da $g(\mathbf{x}) = \mathbf{v} \times \mathbf{x}$, per $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$. (il simbolo "$\times$" indica il prodotto vettoriale in $\mathbf{R}^3$).
   (a) Dimostrare che g è lineare.
   (b) Determinare la dimensione del nucleo di g.

6. Sia $f : \mathbf{R}^6 \longrightarrow \mathbf{R}^6$ la moltiplicazione per la matrice

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

   Determinare una base di autovettori di f.

1. Un'equazione del piano π che passa per r ed è parallelo ad s è data da $x - 2z + 1 = 0$. La distanza cercata è uguale alla distanza dal piano π di un qualsiasi punto $P \in s$. La solita formula ci dice che la distanza di $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ da π è $2/\sqrt{5}$.

2. L'unica soluzione del sistema lineare

$$\begin{cases} x_0 + x_2 & = & 0 \\ 3x_1 + x_2 & = & 0 \\ x_0 + 2x_1 + 3x_2 & = & 0 \end{cases}$$

è la soluzione nulla. Visto che le coordinate di un punto di $\mathbf{P}_2$ non possono essere tutte nulle, le tre rette non passano per uno stesso punto.

3. Questo è l'esercizio 3 (e) del foglio 15.

4. Questo è l'esercizio 6 del foglio 12.

5. La linearità di f segue dalla seguente proprietà standard del prodotto vettoriale: si ha che $\mathbf{v} \times (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = (\mathbf{v} \times \mathbf{x}) + (\mathbf{v} \times \mathbf{y})$ per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$. Il nucleo di f è la retta generata da $\mathbf{v}$ ed ha quindi dimensione 1. Questo segue dal fatto che la lunghezza del vettore $\mathbf{v} \times \mathbf{x}$ si annulla se e solo se si annulla il seno dell'angolo fra $\mathbf{x}$ e $\mathbf{v}$.

6. Il nucleo di f è il sottospazio di equazione $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 0$ ed ha dimensione 5. Ogni base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5$ del nucleo consiste di autovettori di autovalore 0. Per esempio

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

L'immagine di f è lo span del vettore

$$\mathbf{v}_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Visto che f manda l'immagine di f in se stessa, il vettore $\mathbf{v}_6$ è un autovettore. Infatti, l'autovalore corrispondente è la traccia della matrice, la quale è 24. In particolare $\mathbf{v}_6$ non sta nel nucleo di f e quindi i vettori $\mathbf{v}_i$, con $1 \leq i \leq 6$, formano una base di autovettori di $\mathbf{R}^6$.