GEOMETRIA (Schoof) $\qquad$ 2^o appello $\qquad$ Roma, 23 febbraio 2015, ore 11:00–13:00.

COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 5 punti.

1. Decidere se i tre punti $(1\colon 2\colon 3)$, $(1\colon 0\colon -1)$ e $(2\colon 1\colon 0)$ del piano proiettivo $\mathbf{P}^2$ stanno o meno su una stessa retta. Spiegare la risposta.

2. Sia S la sfera di equazione $x^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 3$. Sia π il piano di equazione $x + y + z = 1$. Verificare che l'intersezione fra π ed S è una circonferenza e calcolarne il raggio.

3. Sia $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calcolare A^{1000}.

4. Dire di che tipo di quadrica si tratta:
$$X^2 + Y^2 + Z^2 + 2XY + 2XZ + 2YZ = 1.$$

5. Sia $V \subset \mathbf{R}^3$ il sottospazio dato dall'equazione $x = y$ e sia $h : V \longrightarrow V$ l'applicazione data da $h\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ y+z \\ x+y \end{pmatrix}$. Calcolare il polinomio caratteristico di h.

6. Per $n \geq 1$, sia A la seguente matrice $n \times n$
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & .\cdot^{\cdot} & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Per ogni $n \geq 1$ determinare gli autovalori di A e loro molteplicità algebriche e geometriche.

1. Questo è l'esercizio 7 del foglio 16.
2. Il centro della sfera S è il punto $C = (0, 1, -2)$. La distanza d di C dal piano π è uguale a $|0 + 1 - 2 - 1|/\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = 2/\sqrt{3}$. Poichè d è più piccolo del raggio di S, l'intersezione $S \cap \pi$ è una circonferenza. Per il teorema di Pitagora il raggio della circonferenza è uguale a $\sqrt{3 - 4/3} = \sqrt{5/3}$.
3. Questo è l'esercizio 5 del foglio 12.
4. Si ha che $X^2+Y^2+Z^2+2XY+2XZ+2YZ = (X+Y+Z)^2$. La quadrica è quindi l'unione dei due piani paralleli dati da $X + Y + Z = \pm 1$.
5. Scegliamo una base di V come segue:
   $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Allora $h(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_2$ e $h(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$. La matrice rappresentativia di h rispetto alla base $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ è quindi uguale a $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. In particolare, il polinomio caratteristico è uguale a $\det \begin{pmatrix} -X & 2 \\ 1 & 1 - X \end{pmatrix} = X^2 - X - 2$.
6. Poiché la matrice è simmetrica, è diagonalizzabile. La molteplicità algebrica e e la molteplicità geometrica di ogni autovalore sono quindi uguali. Dal fatto che $A^2 = \mathrm{id}$, segue che gli autovalori λ soddisfano $\lambda^2 = 1$. Sia a la molteplicità di $\lambda = +1$ e sia b la molteplicità di $\lambda = -1$. Allora $a + b = n$, mentre $a - b = \mathrm{Traccia}\, A$, la quale è 0 se n è pari, mentre è uguale a 1 se n è dispari. Questo implica che $a = b = n/2$, se n è pari, mentre $a = (n + 1)/2$ e $b = (n - 1)/2$, se n è dispari.