GEOMETRIA (Schoof) 1^o appello Roma, 9 febbraio 2015, ore 12:00–14:00.

COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 5 punti.

1. In $\mathbf{R}^3$ sia r la retta di equazione cartesiana $\begin{cases} x = 2; \\ y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$ e sia s la retta di equazione parametrica

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Calcolare la distanza fra le due rette r e s.

2. Siano $P = (1{:}\,2{:}\,0)$ e $Q = (2{:}\,0{:}\,1)$ due punti nel piano proiettivo $\mathbf{P}^2$ e sia $r \subset \mathbf{P}^2$ la retta di equazione $x_0 - x_1 + 2x_2 = 0$.
   (a) Calcolare un'equazione per la retta s passante per P e Q.
   (b) Calcolare il punto di intersezione $r \cap s$.

3. Calcolare l'area del triangolo PQR dove P, Q, R sono i punti in $\mathbf{R}^2$ dati da $P = (1, 3)$, $Q = (2, 1)$ e $R = (10, 5)$.

4. Sia B la matrice simmetrica

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esibire una base ortonormale di autovettori di B.

5. Calcolare l'area dell'ellisse di equazione $2X^2 + 4XY + 5Y^2 + 4X - 2Y - 4 = 0$ in $\mathbf{R}^2$.

6. Sia V uno spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare. Sia $\mathbf{v} \in V$ un vettore di lunghezza 1 e sia $f : V \longrightarrow V$ l'applicazione data da $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v}$.
   (a) Dimostrare che f è lineare.
   (b) Determinare la dimensione del nucleo di f.

1. Un'equazione del piano π che contiene r ed è parallelo ad s è data da $x + 2y - 4z + 4 = 0$. La distanza fra r e s è uguale alla distanza di un qualsiasi punto di s al piano π ed è quindi uguale a $|1 + 2 \cdot 2 - 4 \cdot 3 + 4| / \sqrt{1^2 + 2^2 + 4^2} = 3/\sqrt{21}$.
2. Questo è l'esercizio 4 del foglio 16.
3. L'area del triangolo PQR è uguale all'area del triangolo spostato $OQ'R'$ dove $O = (0, 0)$, $Q' = (1, -2)$ e $R' = (9, 2)$. L'area cercata è quindi il valore assoluto di $\frac{1}{2}\det \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ ed è uguale a 10.

4. Questo è l'esercizio 2 del foglio 14.
5. Gli autovalori della matrice simmetrica associata alla forma quadratica $2X^2 + 4XY + 5Y^2$ sono $\lambda = 1$ e $\lambda = 6$. Il cambiamento ortogonale di variabili $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix}$ porta la conica in "forma diagonale". Il risultato è ${X'}^2 + 6{Y'}^2 + 2\sqrt{5}X' - 4 = 0$. La traslazione $X'' = X' + \sqrt{5}$, $Y'' = Y'$ porta la conica nella forma ${X''}^2 + 6{Y''}^2 = 9$ senza cambiare l'area dell'ellisse. Poiché l'area dell'ellisse 'standard' di equazione $X^2/a^2 + Y^2/b^2 = 1$ è πab, l'area della nostra ellisse è $\pi \cdot 3 \cdot \sqrt{9/6} = 9\pi/\sqrt{6}$.
6. (b) Si ha che $f(\mathbf{x}) = 0$ se e solo e $\mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v}$. Il nucleo di f è quindi contenuto nello span di $\mathbf{v}$. Poiché $f(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v} = \mathbf{0}$, il nucleo di f è uguale allo span di $\mathbf{v}$. La dimensione è quindi 0 se $\mathbf{v}$ è zero, ed è 1 se no.