

COGNOME

NOME

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali*. Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 6 punti.

1. Sia S la sfera di equazione $(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9$. Sia π il piano di equazione $-2x + z + 1 = 0$. Verificare che l'intersezione fra π ed S è una circonferenza e calcolarne il raggio.
2. Sia $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ la riflessione rispetto alla retta di equazione $x + 2y = 1$. Calcolare $f(x, y)$ per un punto generico (x, y) in $\mathbf{R}^2$.
3. Sia $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calcolare A^{1000} .
4. Sia $V \subset \mathbf{R}^3$ il sottospazio dato dall'equazione $x = y$ e sia $h : V \rightarrow V$ l'applicazione data da $h \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ y+z \\ x+y \end{pmatrix}$. Calcolare il polinomio caratteristico di h .
5. Per $n \geq 1$, sia A la seguente matrice $n \times n$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per ogni $n \geq 1$ determinare gli autovalori di A e loro molteplicità algebriche e geometriche.

1. Questo è l'esercizio 5 del foglio 6.
2. La retta s , che passa per $P = (x, y)$ ed è ortogonale alla retta r data, ha equazione parametrica $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Per $t = 0$ otteniamo il punto P , mentre per $t = (1 - x - y)/5$ otteniamo il punto di intersezione $r \cap s$. Per $t = 2(1 - x - y)/5$ otteniamo quindi il punto riflesso Q . Sostituendo, troviamo che $Q = ((3x - 4y + 2)/5, (-4x - 3y + 4)/5)$.
3. Questo è l'esercizio 5 del foglio 12.
4. Scegliamo una base di V come segue:
 $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Allora $h(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_2$ e $h(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$. La matrice rappresentativa di h rispetto alla base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ è quindi uguale a $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. In particolare, il polinomio caratteristico è uguale a $\det \begin{pmatrix} -X & 2 \\ 1 & 1 - X \end{pmatrix} = X^2 - X - 2$.
5. Poiché la matrice è simmetrica, è diagonalizzabile. La molteplicità algebrica e la molteplicità geometrica di ogni autovalore sono quindi uguali. Dal fatto che $A^2 = \text{id}$, segue che gli autovalori λ soddisfano $\lambda^2 = 1$. Sia a la molteplicità di $\lambda = +1$ e sia b la molteplicità di $\lambda = -1$. Allora $a + b = n$, mentre $a - b = \text{Traccia } A$, la quale è 0 se n è pari, mentre è uguale a 1 se n è dispari. Questo implica che $a = b = n/2$, se n è pari, mentre $a = (n + 1)/2$ e $b = (n - 1)/2$, se n è dispari.