

COGNOME

NOME

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni chiare ed essenziali. Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 6 punti.

1. In $\mathbf{R}^3$ sia r la retta di equazione cartesiana $\begin{cases} x = 2; \\ y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$ e sia s la retta di equazione parametrica

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (t \in \mathbf{R}).$$

Calcolare la distanza fra le due rette r e s .

2. Calcolare l'area del triangolo PQR dove P, Q, R sono i punti in $\mathbf{R}^2$ dati da $P = (1, 3)$, $Q = (2, 1)$ e $R = (10, 5)$.

3. Sia B la matrice simmetrica

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esibire una base ortonormale di autovettori di B .

4. Sia V uno spazio vettoriale dotato da un prodotto scalare. Sia $\mathbf{v} \in V$ un vettore di lunghezza 1 e sia $f : V \rightarrow V$ l'applicazione data da $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v}$.

(a) Dimostrare che f è lineare.

(b) Determinare la dimensione del nucleo di f .

5. Sia A una matrice 2×2 con la proprietà che $A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Dare un esempio di una matrice A , diversa della matrice zero, che ha questa proprietà.

(b) Dimostrare che la traccia di ogni matrice A con questa proprietà, è uguale a zero.

1. Questo è l'esercizio 1 del 2° appello (a meno dei numeri). Un'equazione del piano π che contiene r ed è parallelo ad s è data da $x + 2y - 4z + 4 = 0$. La distanza fra r e s è uguale alla distanza di un qualsiasi punto di s al piano π ed è quindi uguale a $|1 + 2 \cdot 2 - 4 \cdot 3 + 4| / \sqrt{1^2 + 2^2 + 4^2} = 3 / \sqrt{21}$.

2. L'area del triangolo PQR è uguale all'area del triangolo spostato $OQ'R'$ dove $O = (0, 0)$, $Q' = (1, -2)$ e $R' = (9, 2)$. L'area cercata è quindi il valore assoluto di $\frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ ed è uguale a 10.

3. Questo è l'esercizio 2 del foglio 15.
4. (b) Si ha che $f(\mathbf{x}) = 0$ se e solo se $\mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v}$. Il nucleo di f è quindi contenuto nello span di $\mathbf{v}$. Poiché $f(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \mathbf{v} = \mathbf{0}$, il vettore non nullo $\mathbf{v}$ sta nel nucleo di f . La dimensione è quindi uguale a 1.
5. (a) Un esempio di matrice con questa proprietà è $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. (b) Poiché A non può essere invertibile, almeno un autovalore di A è zero. Sia λ la seconda radice del polinomio caratteristico di A . Supponiamo che $\lambda \neq 0$. Allora esiste un autovettore $\mathbf{v}$ di autovalore λ . Si ha che $A(A(\mathbf{v})) = \lambda^2 \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Contraddizione, perché $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Conclusione: $\lambda = 0$ e quindi anche la traccia di A è zero.