GEOMETRIA (Schoof) $4^o$ appello Roma, 26 settembre 2014, ore 14:00–16:00.

*COGNOME* .............................. *NOME* ........................

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 6 punti.

1. In $\mathbf{R}^3$, siano date le rette $r$ e $r'$ di equazioni parametriche

$$r: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (t \in \mathbf{R}) \qquad \text{e} \qquad r': \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (s \in \mathbf{R}).$$

   Determinare la distanza fra $r$ ed $r'$.

Il piano $\pi$ che contiene $r$ ed è parallelo ad $r'$ ha equazione $x - 2y - z = 2$. La distanza fra $r$ ed $r'$ è uguale alla distanza del punto $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dal piano $\pi$ ed è quindi uguale a $|3 - 2 - 0 - 2|/\sqrt{6} = 1/\sqrt{6}$.

2. Sia $A$ la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calcolare $A^{1000}$.

Gli autovalori di $A$ sono 4 e $-1$. Sia $\mathbf{v}_1$ l'autovettore $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ di autovalore 4 e sia $\mathbf{v}_2$ l'autovettore $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ di autovalore $-1$. Sia $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ la moltiplicazione per la matrice $A$. Rispetto alla base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ la matrice rappresentativa di $f$ è $A' = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. La matrice del cambiamento di base è $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ e si ha che $A = BA'B^{-1}$ e quindi $A^{1000} = BA'^{1000}B^{-1}$. Dal fatto che $A'^{1000} = \begin{pmatrix} 4^{1000} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ segue che

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4^{1000} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (4^{1001} + 1)/5 & (4^{1001} - 4)/5 \\ (4^{1000} - 1)/5 & (4^{1000} + 4)/5 \end{pmatrix}.$$

3. Sia $g : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ la proiezione ortogonale sul piano di equazione $x + y + 2z = 0$. Si sa che $g$ è un'applicazione lineare.
   (a) Esibire una base di $\mathbf{R}^3$ che consiste di autovettori di $g$.
   (b) Calcolare la traccia di $g$.

Il piano $\pi$ di equazione $x + y + 2z = 0$ consiste nei punti fissati da $g$ ed è quindi uguale all'autospazio di autovalore $\lambda = 1$. Invece, il vettore normale di $\pi$ è un autovettore di $g$ di autovalore $\lambda = 0$. Quindi una base di $\mathbf{R}^3$ che consiste in autovettori di $g$ è una qualunque terna di vettori formata da un vettore normale a $\pi$ e da una base di $\pi$. Per esempio

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Per (b) basta osservare che la matrice rappresentativa di $g$ rispetto ad una base di autovettori come sopra è diagonale con coefficienti $\lambda = 0, +1, +1$. La traccia di $g$ è quindi uguale a $0 + 1 + 1 = 2$.

4. Sia $V$ uno spazio vettoriale e siano $W$ e $W'$ sottospazi di $V$. Dimostrare che $W \cup W'$ è un sottospazio di $V$ se e solo se $W \subset W'$ oppure $W' \subset W$.

Questo è l'esercizio 4 del compito scorso.

5. Sia $V = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 : x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ e sia $W$ il sottospazio di $V$ dato da $W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in V : x_2 = x_4\}$.
   (a) Esibire un complemento $W'$ di $W$ in $\mathbf{R}^4$.
   (b) Dimostrare che per ogni complemento $W'$ di $W$ in $\mathbf{R}^4$ vale $\dim(V \cap W') = 1$.

Questo è l'esercizio 5 del compito scorso.