GEOMETRIA (Schoof) 3^o appello Roma, 2 settembre 2014, ore 10:00–12:00.

COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 6 punti.

1. In $\mathbf{R}^3$, siano dati il piano V di equazione $x + y + z = 6$ e la sfera S di equazione $x^2 + (y - 1)^2 + (z + 1)^2 = 3$. Determinare il punto $P \in S$ di minima distanza da V.

Il punto P sta sulla retta m passante per il centro di S e perpendicolare a V. Un'equazione parametrica di m è data da

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Il valore $t = 2$ corrisponde al punto di intersezione $m \cap V$, mentre i due punti dell'intersezione $m \cap S$ corrispondo a $t = \pm 1$. Il punto più vicino è quello che corrisponde a $t = +1$. Questo vuol dire che $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. Siano $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e sia $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare determinata da $f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_2$, $f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_3$ e $f(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1$. Sia $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Calcolare $f(\mathbf{w})$.

Si ha che $\mathbf{w} = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_2)$ e quindi per linearità

$$f(\mathbf{w}) = \frac{1}{2}(f(\mathbf{v}_1) + f(\mathbf{v}_3) - f(\mathbf{v}_2)) = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Sia $g : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ la riflessione rispetto al piano di equazione $x+y+z = 0$. Si sa che g è un'applicazione lineare.
   (a) Esibire una base di $\mathbf{R}^3$ che consiste di autovettori di g.
   (b) Calcolare la traccia di g.

Il piano π di equazione $x + y + z = 0$ consiste nei punti fissati da g ed è quindi uguale all'autospazio di autovalore $\lambda = 1$. Invece, il vettore normale di π è un autovettore di g di autovalore $\lambda = -1$. Quindi una base di $\mathbf{R}^3$ che consiste in autovettori di g è una qualunque terna di vettori formata da un vettore normale a π e da una base di π. Per esempio

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Per (b) basta osservare che la matrice rappresentativa di g rispetto ad una base di autovettori come sopra è diagonale con coefficienti $\lambda = -1, +1, +1$. La traccia di g è quindi uguale a $-1 + 1 + 1 = 1$.

4. Sia V uno spazio vettoriale e siano W e W' sottospazi di V. Dimostrare che $W \cup W'$ è un sottospazio di V se e solo se $W \subset W'$ oppure $W' \subset W$.

Questo è l'esercizio 6 del foglio 4.

5. Sia $V = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^4 : x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ e sia W il sottospazio di V dato da $W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in V : x_2 = x_4\}$.
   (a) Esibire un complemento W' di W in $\mathbf{R}^4$.
   (b) Dimostrare che per ogni complemento W' di W in $\mathbf{R}^4$ vale $\dim(V \cap W') = 1$.

Questo è l'esercizio 4 del foglio 9.