GEOMETRIA (Schoof) 2^o appello Roma, 15 luglio 2014, ore 11:00–13:00.

COGNOME .... *NOME* ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali.* Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 6 punti.

1. In $\mathbf{R}^3$ sia r la retta di equazione cartesiana $\begin{cases} x+y-z=1; \\ 2y+z=0. \end{cases}$ e sia s la retta di equazione parametrica

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (t \in \mathbf{R}).$$

Calcolare la distanza fra le due rette r e s.

La direzione della retta r è data da una soluzione non nulla del sistema omogeneo $\begin{cases} x+y-z=0; \\ 2y+z=0. \end{cases}$, ed è proporzionale a $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Il piano π passante per s e parallelo ad r ha quindi equazione parametrica

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad (t, s \in \mathbf{R}).$$

Un vettore normale a π è dato da $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ ed un'equazione cartesiana di π è quindi $2x+4y-z-3=0$. La distanza $d(r,s)$ fra s e r è uguale alla distanza $d(\pi, P)$ fra π e un qualsiasi punto P di r. Prendendo ad esempio il punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ di r troviamo che $d(r,s) = d(\pi, P) = |2+0-0-3|/\sqrt{2^2+4^2+1^2} = 1/\sqrt{21}$.

2. In $\mathbf{R}^3$ sia S la sfera di equazione $(x_1-1)^2+(x_2+1)^2+(x_3-2)^2 = 9$ e sia π il piano di equazione $-2x_1+x_3+1=0$.
   (a) Calcolare la distanza fra π e il centro di S.
   (b) Verificare che l'intersezione fra π ed S è una circonferenza e calcolarne il raggio.

Questo è l'esercizio 5 del foglio 6.

3. Sia $g : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ la riflessione rispetto alla retta data da $2x + y = 0$. Allora si sa che g è un'applicazione lineare. Esibire una base di $\mathbf{R}^2$ che consiste di autovettori di g. Dire chi sono gli autovalori.

La retta stessa è l'autospazio di autovalore 1. L'altro autospazio è la retta passante per l'origine e perpendicolare a la reatta data da $2x+y=0$. La sua equazione è $x = 2y$. L'autovalore corrispondente è -1. Una base di autovettori è data da $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e sia f l'applicazione $f(\mathbf{v}) = B\cdot\mathbf{v}$ per $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^4$.
   (a) Sia $V = \ker A$. Dimostrare che $f(V) \subset V$.
   (b) Sia $F : V \longrightarrow V$ la restrizione di f a V (cioè $F(\mathbf{v}) = f(\mathbf{v})$ per ogni $\mathbf{v} \in V$). Calcolare il polinomio caratteristico di F.

Una base dello spazio V è per esempio data dai vettori $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Il fatto che $f(V) \subset V$ segue dalle uguaglianze

$$f(\mathbf{v}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \qquad \text{e} \qquad f(\mathbf{v}_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2.$$

Le stesse uguaglianze implicano che la matrice rappresentativa di F rispetto alla base $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ è uguale a $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Il polinomio caratteristico è quindi uguale a $X^2 - 2X$.

5. Per ogni $n \geq 1$ calcolare il determinante della seguente matrice $n \times n$. Spiegare la risposta.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & .\cdot\dot{} & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Questo è l'esercizio 4 del foglio 11.