

COGNOME

NOME

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali*. Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 6 punti.

1. In $\mathbf{R}^3$ siano dati il punto $\mathbf{p}$ e la retta r come segue

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad r : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, (t \in \mathbf{R}).$$

Calcolare la distanza di $\mathbf{p}$ da r .

Questo è l'esercizio 1 del foglio 6.

2. Sia r la retta in $\mathbf{R}^3$ di equazione cartesiana $\begin{cases} y = z \\ x = 1 \end{cases}$ e siano P e Q i punti di intersezione di r con la sfera di centro $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e raggio 2. Calcolare la distanza fra P e Q .

Un'equazione della sfera è data da $X^2 + (Y - 1)^2 + Z^2 = 4$. Per le coordinate dei punti P e Q abbiamo che $x = 1$ e $y = z$ e quindi $1 + (y - 1)^2 + y^2 = 4$. Questo implica che $y = (1 \pm \sqrt{5})/2$ e determina

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ (1 + \sqrt{5})/2 \\ (1 + \sqrt{5})/2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 1 \\ (1 - \sqrt{5})/2 \\ (1 - \sqrt{5})/2 \end{pmatrix}.$$

La distanza fra P e Q è la lunghezza del vettore

$$\begin{pmatrix} 1 \\ (1 + \sqrt{5})/2 \\ (1 + \sqrt{5})/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ (1 - \sqrt{5})/2 \\ (1 - \sqrt{5})/2 \end{pmatrix},$$

vale a dire è $\sqrt{10}$.

3. Sia $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e sia $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione data da $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \times \mathbf{v}$. Determinare la dimensione dell'immagine di f .

Si ha che $f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - z \\ z + x \\ x + y \end{pmatrix}$. Il nucleo di f consiste quindi dei vettori $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ che soddisfano $-x = y = z$.

In altre parole $\ker f$ è lo span di $\mathbf{v}$ e ha quindi dimensione 1. Ne segue che l'immagine di f ha dimensione 2.

4. Sia $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calcolare A^{1000} .

Questo è l'esercizio 5 del foglio 13.

5. Sia $V \subset \mathbf{R}^3$ il sottospazio dato da $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : x = y \right\}$ e sia $h : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione

$$\text{data da } h \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + z \\ y + z \\ 3x - y \end{pmatrix}.$$

- (a) Dimostrare che se $\mathbf{x} \in V$, allora anche $h(\mathbf{x}) \in V$
(b) Sia $H : V \longrightarrow V$ la *restrizione* di h a V . Si ha quindi che $H(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x})$ per ogni $\mathbf{x} \in V$.
Calcolare il polinomio caratteristico di H .

La parte (a) segue dal fatto che se $x = y$, allora la prima coordinata di $h \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ è uguale alla seconda ed

$h(\mathbf{x}) \in V$. Per la parte (b) scegliamo la base $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ed $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ di V . Allora si ha che

$$H(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_2 \quad \text{e} \quad H(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_1.$$

La matrice rappresentativa di H rispetto alla base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ è quindi uguale a $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e il suo polinomio caratteristico è $X^2 - X - 2$.

COGNOME

NOME

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali*. Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 6 punti.

1. In $\mathbf{R}^3$ siano dati il punto $\mathbf{p}$ e la retta r come segue

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad r : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, (t \in \mathbf{R}).$$

Calcolare la distanza di $\mathbf{p}$ da r .

2. Sia r la retta in $\mathbf{R}^3$ di equazione cartesiana $\begin{cases} y = z \\ x = 1 \end{cases}$ e siano P e Q i punti di intersezione di r con la sfera di centro $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e raggio 3. Calcolare la distanza fra P e Q .

3. Sia $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e sia $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione data da $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \times \mathbf{v}$. Determinare la dimensione dell'immagine di f .

4. Sia $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calcolare A^{1000} .

5. Sia $V \subset \mathbf{R}^3$ il sottospazio dato da $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : x = y \right\}$ e sia $h : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione

$$\text{data da } h \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + z \\ y + z \\ 2x - y \end{pmatrix}.$$

- (a) Dimostrare che se $\mathbf{x} \in V$, allora anche $h(\mathbf{x}) \in V$
(b) Sia $H : V \longrightarrow V$ la *restrizione* di h a V . Si ha quindi che $H(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x})$ per ogni $\mathbf{x} \in V$. Calcolare il polinomio caratteristico di H .

COGNOME

NOME

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali*. Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 6 punti.

1. In $\mathbf{R}^3$ siano dati il punto $\mathbf{p}$ e la retta r come segue

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad r : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, (t \in \mathbf{R}).$$

Calcolare la distanza di $\mathbf{p}$ da r .

2. Sia r la retta in $\mathbf{R}^3$ di equazione cartesiana $\begin{cases} y = z \\ x = 1 \end{cases}$ e siano P e Q i punti di intersezione di r con la sfera di centro $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e raggio 2. Calcolare la distanza fra P e Q .

3. Sia $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e sia $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione data da $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \times \mathbf{v}$. Determinare la dimensione dell'immagine di f .

4. Sia $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calcolare A^{1000} .

5. Sia $V \subset \mathbf{R}^3$ il sottospazio dato da $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : x = y \right\}$ e sia $h : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione

$$\text{data da } h \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + z \\ y + z \\ x + 2y \end{pmatrix}.$$

- (a) Dimostrare che se $\mathbf{x} \in V$, allora anche $h(\mathbf{x}) \in V$
(b) Sia $H : V \longrightarrow V$ la *restrizione* di h a V . Si ha quindi che $H(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x})$ per ogni $\mathbf{x} \in V$. Calcolare il polinomio caratteristico di H .

COGNOME

NOME

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare ed essenziali*. Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO. Ogni esercizio vale 6 punti.

1. In $\mathbf{R}^3$ siano dati il punto $\mathbf{p}$ e la retta r come segue

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad r : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, (t \in \mathbf{R}).$$

Calcolare la distanza di $\mathbf{p}$ da r .

2. Sia r la retta in $\mathbf{R}^3$ di equazione cartesiana $\begin{cases} y = z \\ x = 1 \end{cases}$ e siano P e Q i punti di intersezione di r con la sfera di centro $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e raggio 3. Calcolare la distanza fra P e Q .

3. Sia $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e sia $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione data da $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \times \mathbf{v}$. Determinare la dimensione dell'immagine di f .

4. Sia $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calcolare A^{1000} .

5. Sia $V \subset \mathbf{R}^3$ il sottospazio dato da $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : x = y \right\}$ e sia $h : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione

$$\text{data da } h \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + z \\ y + z \\ x + 3y \end{pmatrix}.$$

- (a) Dimostrare che se $\mathbf{x} \in V$, allora anche $h(\mathbf{x}) \in V$
(b) Sia $H : V \longrightarrow V$ la *restrizione* di h a V . Si ha quindi che $H(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x})$ per ogni $\mathbf{x} \in V$. Calcolare il polinomio caratteristico di H .