Versione preliminare
13 dicembre 2003

II Università degli
Studi di Roma

TOR VERGATA

Dispense di Geometria. Capitolo 3.

7. Coniche in $\mathbf{R}^2$.

Nel Capitolo I abbiamo visto che gli insiemi di punti $P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ che soddisfano un'equazione lineare (di primo grado)

$$ax_1 + bx_2 = c$$

con $a, b, c \in \mathbf{R}$, a, b non entrambi nulli, sono esattamente le rette del piano. Ci occupiamo adesso degli insiemi o "luoghi geometrici" definiti da equazioni di secondo grado.

Definizione. Una conica in $\mathbf{R}^2$ è l'insieme dei punti $P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ che soddisfano un'equazione di secondo grado

$$ax_1^2 + bx_2^2 + cx_1x_2 + dx_1 + ex_2 + f = 0$$

dove $a, b, c, d, e, f \in \mathbf{R}$ con a, b, c non tutti nulli.

Osserviamo innanzitutto che, a differenza delle rette, le coniche di $\mathbf{R}^2$ possono avere forme geometriche diverse.

Esempio 7.1. I punti $P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ che soddisfano l'equazione $2x_1^2 + 9x_2^2 = 1$ formano un'ellisse.

Fig.1. L'ellisse $2x_1^2 + 9x_2^2 = 1$ in $\mathbf{R}^2$.

Esempio 7.2. I punti $P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ che soddisfano l'equazione $2x_1^2 - 9x_2^2 = 1$ formano un'iperbole.

Fig.2. L'iperbole $2x_1^2 - 9x_2^2 = 1$ in $\mathbf{R}^2$.

Esempio 7.3. I punti $P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ che soddisfano l'equazione $2x_1^2 - x_2 = 0$ formano una parabola.

Fig.3. La parabola $2x_1^2 - x_2 = 0$ in $\mathbf{R}^2$.

Esempio 7.4. I punti $P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ che soddisfano l'equazione $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 4x_2 + 1 = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 - 4 = 0$ formano la circonferenza di centro $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e raggio 2.

Fig.4. La circonferenza $(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2 - 4 = 0$ in $\mathbf{R}^2$.

Esempio 7.5. I punti $P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ che soddisfano l'equazione $x_1^2 - 1 = (x_1 + 1)(x_1 - 1) = 0$

formano la coppia di rette verticali $r: \; x_1 = -1$ ed $s: \; x_1 = 1$.

Fig.5. La coppia di rette $(x_1+1)(x_1-1)=0$ in $\mathbf{R}^2$.

Esempio 7.6. I punti $P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ che soddisfano l'equazione $x_1^2 + 2x_2^2 = 0$ consistono nel solo punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Esempio 7.7. Non ci sono punti $P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ che soddisfano l'equazione $x_1^2 + 2x_2^2 + 1 = 0$.

Una domanda naturale è dunque la seguente: data un'equazione di secondo grado nel piano

$$ax_1^2 + bx_2^2 + cx_1x_2 + dx_1 + ex_2 + f = 0,$$

che tipo di conica definisce? Ad esempio, l'equazione

$$11x_1^2 - 24x_1x_2 + 4x_2^2 + 28x_1 - 96x_2 - 120 = 0 \tag{1}$$

che tipo di conica definisce? Ricordiamo innanzitutto che le equazioni di un dato luogo geometrico dipendono dal sistema di riferimento. Ogni conica, in un opportuno sistema di riferimento, ha un'equazione particolarmente semplice; da questa equazione risulta chiaro di che conica si tratta. Diamo ora un metodo generale per determinare questo sistema di riferimento "conveniente" per una conica qualunque. Sia dunque

$$ax_1^2 + bx_2^2 + cx_1x_2 + dx_1 + ex_2 + f = 0 \tag{2}$$

un'equazione di secondo grado in $\mathbf{R}^2$, dove $a, b, c, d, e, f \in \mathbf{R}$, con a, b, c non tutti nulli. Procediamo in due passi:

1) Il primo passo consiste in un cambiamento di coordinate che elimina il termine misto di secondo grado cx_1x_2 dall'equazione (2).

Sia

$$ax_1^2 + bx_2^2 + cx_1x_2 = \mathbf{x}^t \cdot Q \cdot \mathbf{x},$$

con $Q = \begin{pmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{pmatrix}$, la forma quadratica formata dai termini di secondo grado dell'equazione (2). Poiché Q è una matrice reale simmetrica, ha autovalori reali ed esiste una base $\mathcal{B}$ ortonormale di

$\mathbf{R}^2$, formata da autovettori di Q (vedi l'Eserc.7.A). Nel sistema di coordinate $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$ indotto da $\mathcal{B}$, la forma quadratica si diagonalizza, diventa cioè

$$A\tilde{X}_1^2 + B\tilde{X}_2^2,$$

dove A e B sono gli autovalori di Q. Sia dunque $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$, con $\mathbf{e}'_1 = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_3 \end{pmatrix}, \mathbf{e}'_2 = \begin{pmatrix} m_2 \\ m_4 \end{pmatrix}$, e sia

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{X}_1 \\ \tilde{X}_2 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

il cambiamento di coordinate dalla base $\mathcal{B}$ alla base canonica. Si tratta di un cambiamento di coordinate ortonormale e la matrice $M = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{pmatrix}$ è una matrice ortogonale. Sostituendo le relazioni (3) nell'equazione (2), essa prende la forma

$$A\tilde{X}_1^2 + B\tilde{X}_2^2 + C\tilde{X}_1 + D\tilde{X}_2 + E = 0, \tag{4}$$

dove $A, B, C, D, E \in \mathbf{R}$, con A, B non entrambi nulli.

2) Il secondo passo consiste in un cambiamento di coordinate, questa volta una traslazione, che elimina entrambi i termini di grado uno, oppure uno dei termini di grado uno e il termine noto dall'equazione (4). Scriviamo

$$\tilde{X}_1 = X_1 + \alpha$$
$$\tilde{X}_2 = X_2 + \beta.$$

e sostituiamo queste relazioni nell'equazione (4); troviamo

$$AX_1^2 + BX_2^2 + (2A\alpha + C)X_1 + (2B\beta + D)X_2 + (A\alpha^2 + B\beta^2 + C\alpha + D\beta + E) = 0. \tag{5}$$

A questo punto è chiaro che, se A e B sono entrambi diversi da zero, esistono α e β in grado di eliminare entrambi i termini di primo grado. In questo caso infatti α e β si ricavano dalla (5) imponendo $(2A\alpha + C) = 0$ e $(2B\beta + D) = 0$, da cui

$$\alpha = -C/2A \ \text{ e } \ \beta = -D/2B.$$

L'equazione (5) diventa in questo caso:

$$AX_1^2 + BX_2^2 + E' = 0, \tag{6}$$

dove $A, B, E' \in \mathbf{R}$, con $A, B \neq 0$.

Supponiamo adesso che uno dei due coefficienti A, B dei termini di secondo grado nella (4) sia nullo. Pur di scambiare X_1 e X_2, possiamo supporre ad esempio $B = 0$. In questo caso, non potendo eliminare il termine di primo grado in X_2, possiamo usare il parametro β della traslazione per eliminare il termine di grado zero. Imponendo $(A\alpha^2 + C\alpha + D\beta + E) = 0$, purché sia $D \neq 0$, ricaviamo

$$\beta = (-E - A\alpha^2 - C\alpha)/D,$$

e l'equazione (5) diventa

$$AX_1^2 + D'X_2 = 0, \tag{7}$$

dove $A, D' \in \mathbf{R}$, con $A \neq 0$. Se infine $B = D = 0$, possiamo solo eliminare il termine di primo grado in X_1 e ridurre l'equazione alla forma

$$AX_1^2 + F' = 0, \tag{8}$$

con $A, F' \in \mathbf{R}$, $A \neq 0$.

In conclusione, in un opportuno sistema di riferimento X_1, X_2 del piano, una conica è definita da un'equazione della forma (6),(7) o (8). Una lista completa, delle varie possibilità è contenuta nella Tabella 6.

Tabella 6.

1.	$\frac{X_1^2}{a^2} + \frac{X_2^2}{b^2} = 1$	ellisse
2.	$\frac{X_1^2}{a^2} + \frac{X_2^2}{b^2} = -1$	$\emptyset$
3.	$\frac{X_1^2}{a^2} + \frac{X_2^2}{b^2} = 0$	un punto
4.	$\frac{X_1^2}{a^2} - \frac{X_2^2}{b^2} = 1$	iperbole
5.	$\frac{X_1^2}{a^2} - \frac{X_2^2}{b^2} = 0$	rette incidenti
6.	$aX_1^2 = X_2$	parabola
7.	$\frac{X_1^2}{a^2} = 1$	rette parallele distinte
8.	$X_1^2 = 0$	rette parallele coincidenti
9.	$\frac{X_1^2}{a^2} = -1$	$\emptyset$

I coefficienti $a, b \in \mathbf{R}$ sono opportuni numeri positivi. Se nelle coniche di tipo $1, 2, 3$ si pone $a \geq b$, allora la Tabella 6 non contiene ripetizioni.

Osserviamo che il nuovo sistema di riferimento X_1, X_2 può essere scelto così che il cambiamento di coordinate dal sistema x_1, x_2 al sistema X_1, X_2 sia una *isometria* o *trasformazione rigida del piano*. Può essere infatti ottenuto dalla composizione di rotazioni, riflessioni e traslazioni, che conservano angoli e distanze. Poiché un'equazione di secondo grado può essere portata mediante un'isometria in una e una sola delle equazioni della Tabella 6, essa dà una classificazione completa delle coniche del piano. A sottolineare che i cambiamenti di coordinate usati sono tutti isometrici, il procedimento descritto nei passi 1) e 2) si chiama *riduzione della conica in forma canonica metrica* e la classificazione prodotta si chiama *classificazione metrica delle coniche*.

Esaminiamo ora in dettaglio le coniche principali della Tabella 6.

Esempio 7.7. L'ellisse di equazione

$$\frac{X_1^2}{a^2} + \frac{X_2^2}{b^2} = 1$$

è una curva chiusa, è simmetrica rispetto agli assi coordinati e rispetto all'origine. I numeri positivi a e b sono le lunghezze dei semiassi dell'ellisse.

Fig.7. L'ellisse $\frac{X_1^2}{a^2} + \frac{X_2^2}{b^2} = 1$.

Un'ellisse può anche essere definita nel seguente modo:

Definizione. Siano F ed F' due punti di $\mathbf{R}^2$ e sia $a \in \mathbf{R},\ a > 0$. L'*ellisse* di fuochi F ed F' e di semiasse a è l'insieme dei punti $P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ tali che la somma delle distanze $d(P, F)$ di P da F e $d(P, F')$ da P a F' sia costante ed uguale a $2a$.

$$E = \{P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : d(P, F) + d(P, F') = 2a\}.$$

Se $F = F'$, l'ellisse non è altro che la circonferenza di centro F e raggio a. Se i fuochi F, F' sono i punti di coordinate $F = \begin{pmatrix} \sqrt{a^2 - b^2} \\ 0 \end{pmatrix}$ ed $F' = \begin{pmatrix} -\sqrt{a^2 - b^2} \\ 0 \end{pmatrix}$, con $a \geq b$, l'equazione dell'ellisse corrispondente è proprio $\frac{X_1^2}{a^2} + \frac{X_2^2}{b^2} = 1$.

Esempio 7.8. L'iperbole di equazione

$$\frac{X_1^2}{a^2} - \frac{X_2^2}{b^2} = 1$$

è una curva composta da due rami, approssimati asintoticamente dalla coppia di rette $\frac{X_1}{a} - \frac{X_2}{b} = 0$ e $\frac{X_1}{a} + \frac{X_2}{b} = 0$, gli asintoti, che si incontrano nell'origine. È simmetrica rispetto agli assi coordinati e rispetto all'origine. Il numero positivo a è la lunghezza del semiasse dell'iperbole.

Fig.8. L' iperbole $\frac{X_1^2}{a^2} - \frac{X_2^2}{b^2} = 1$.

Un'iperbole può anche essere definita nel seguente modo:

Definizione. Siano F ed F' due punti di $\mathbf{R}^2$ e sia $a \in \mathbf{R},\ a > 0$. L'*iperbole* di fuochi F ed F' e di semiasse a è l'insieme dei punti $P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ tali che il valore assoluto della differenza delle distanze di P da F ed F' sia costante ed uguale a $2a$:

$$I = \{P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : |d(P,F) - d(P,F')| = 2a\}.$$

Se i fuochi F, F' sono i punti di coordinate $F = \begin{pmatrix} \sqrt{a^2+b^2} \\ 0 \end{pmatrix}$ ed $F' = \begin{pmatrix} -\sqrt{a^2+b^2} \\ 0 \end{pmatrix}$, l'equazione dell'iperbole corrispondente è proprio $\frac{X_1^2}{a^2} - \frac{X_2^2}{b^2} = 1$.

Esempio 7.9. La parabola di equazione

$$aX_1^2 = X_2$$

è una curva simmetrica rispetto all'asse X_2, avente il suo vertice nell'origine degli assi.

Fig.9. La parabola $aX_1^2 = X_2$.

La parabola può essere definita anche nel seguente modo:

Definizione. Siano r una retta ed F un punto di $\mathbf{R}^2$. Sia p un numero positivo. La *parabola* C di fuoco F, direttrice r e parametro $p = d(F,r)/2$ è l'insieme dei punti del piano equidistanti da F e da r

$$C = \{P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \mid d(P,F) = d(P,r)\}.$$

Scegliendo come fuoco il punto $F = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/4a \end{pmatrix}$ sull'asse delle ordinate e come direttrice la retta parallela all'asse delle ascisse di equazione $X_2 = -1/4a$, il valore del parametro risulta $p = 1/4a$ e l'equazione della parabola corrispondente è proprio $aX_1^2 = X_2$.

Esempio 7.10. Per illustrare il procedimento di riduzione a forma canonica sopra esposto, studiamo adesso la conica

$$11x_1^2 - 24x_1x_2 + 4x_2^2 + 28x_1 - 96x_2 - 120 = 0$$

dell'equazione (1). Ne determiniamo il tipo riducendola in forma canonica e diamo poi un'interpretazione geometrica dei cambiamenti di coordinate coinvolti.

La forma quadratica associata alla conica è $11x_1^2 - 24x_1x_2 + 4x_2^2$. La matrice simmetrica corrispondente è $Q = \begin{pmatrix} 11 & -12 \\ -12 & 4 \end{pmatrix}$. Gli autovalori di Q sono $\lambda = 20$ e $\mu = -5$. I rispettivi autospazi sono $V_{20} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$ e $V_{-5} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}$. Una base ortonormale di $\mathbf{R}^2$ formata da autovettori di Q è data da $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix} -4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}\right\}$. Il cambiamento di coordinate ortonormale

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/5 & 3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{X}_1 \\ \tilde{X}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5}\tilde{X}_1 + \frac{3}{5}\tilde{X}_2 \\ \frac{3}{5}\tilde{X}_1 + \frac{4}{5}\tilde{X}_2 \end{pmatrix}$$

porta l'equazione nella forma

$$4\tilde{X}_1^2 - \tilde{X}_2^2 - 16\tilde{X}_1 - 12\tilde{X}_2 - 24 = 0. \qquad (10)$$

Cerchiamo adesso α e β in modo che il cambiamento di coordinate

$$\begin{aligned} \tilde{X}_1 &= X_1 + \alpha \\ \tilde{X}_2 &= X_2 + \beta \end{aligned} \qquad (11)$$

elimini dall'equazione (10) i termini di primo grado. Sostituendo le relazioni (11) nell'equazione (10), troviamo

$$4X_1^2 - X_2^2 + (8\alpha - 16)X_1 - (2\beta + 12)X_2 + (4\alpha^2 - \beta^2 - 16\alpha - 12\beta - 24) = 0,$$

da cui ricaviamo $\alpha = 2$ e $\beta = -6$. L'equazione della conica diventa così

$$4X_1^2 - X_2^2 - 4 = 0, \quad \text{ossia} \quad X_1^2 - \frac{X_2^2}{4} = 1.$$

Si tratta di un'iperbole, con semiasse di lunghezza 1 e avente come asintoti le rette $2x_1 \pm x_2 = 0$.

Fig.10. L'iperbole $11x_1^2 - 24x_1x_2 + 4x_2^2 + 28x_1 - 96x_2 - 120 = 0$ in forma canonica.

Vogliamo adesso rappresentare la conica nel riferimento originario (x_1, x_2). Per fare ciò, abbiamo bisogno di conoscere assi e centro di simmetria, asintoti e lunghezza del semiasse dell'iperbole nel riferimento (x_1, x_2). Nel sistema di riferimento (X_1, X_2) gli assi di simmetria coincidono con gli assi coordinati e quindi hanno equazioni $X_1 = 0$ e $X_2 = 0$.

Conoscendo le formule del cambiamento di coordinate dal sistema (X_1, X_2) al sistema (x_1, x_2) possiamo ricavare le equazioni degli assi di simmetria nelle coordinate (x_1, x_2). Componendo le trasformazioni

$$\mathbf{x} = M\tilde{\mathbf{X}} \quad \text{e} \quad \tilde{\mathbf{X}} = T_{\binom{\alpha}{\beta}}\mathbf{X}$$

usate per ridurre la conica in forma canonica, otteniamo

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/5 & 3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 + 2 \\ X_2 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5}X_1 + \frac{3}{5}X_2 - \frac{26}{5} \\ \frac{3}{5}X_1 + \frac{4}{5}X_2 - \frac{18}{5} \end{pmatrix}.$$

Queste relazioni, sostituite nell'equazione della conica in (x_1, x_2), ci hanno dato l'equazione della conica in (X_1, X_2). Invertendole troviamo

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5}x_1 + \frac{3}{5}x_2 - 2 \\ \frac{3}{5}x_1 + \frac{4}{5}x_2 + 6 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Queste relazioni, sostituite nell'equazione di un luogo geometrico in (X_1, X_2), ci danno le equazioni dello stesso luogo in (x_1, x_2).

Fig.11. L'iperbole $11x_1^2 - 24x_1x_2 + 4x_2^2 + 28x_1 - 96x_2 - 120 = 0$.

Dalle equazioni (12) risulta che $X_1 = 0$ se e solo se $-4/5x_1 + 3/5x_2 - 2 = 0$. Dunque quest'ultima è proprio l'equazione dell'asse X_2 nel riferimento (x_1, x_2). Analogamente, l'equazione dell'asse $X_2 = 0$ nel riferimento (x_1, x_2) è data da $3/5x_1 + 4/5x_2 + 6 = 0$, le coordinate del centro di simmetria sono $(-26/5, -18/5)$, le equazioni degli asintoti sono rispettivamente $-x_1 + 2x_2 + 2 = 0$ e $11x_1 - 2x_2 + 50 = 0$. Infine, la lunghezza del semiasse è come prima uguale a 1.

Osservazione. Geometricamente possiamo interpretare così i cambiamenti di coordinate effettuati rispettivamente nel passo 1 e nel passo 2: il riferimento $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$ è un riferimento centrato nell'origine delle coordinate (x_1, x_2), con assi coordinati paralleli agli assi di simmetria della conica; il riferimento (X_1, X_2) ha l'origine delle coordinate coincidente col centro di simmetria della conica ed assi coordinati coincidenti con gli assi di simmetria della conica.

Fig.12. I sistemi di coordinate $(\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$ e (X_1, X_2).

Esempio 7.11. Disegnamo la conica C

$$x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1 - 2x_2 - 1 = 0. \tag{13}$$

La forma quadratica associata a C è data da $x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2$, la matrice simmetrica corrispondente è $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Gli autovalori di Q sono $\lambda = 0$ e $\mu = 2$, con autospazi dati rispettivamente da $V_0 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ e $V_2 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. Il cambiamento di coordinate ortonormale

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{X}_1 \\ \tilde{X}_2 \end{pmatrix}$$

riduce l'equazione (13) nella forma

$$2\tilde{X}_2^2 - 2\sqrt{2}\tilde{X}_2 - 1 = 0. \tag{14}$$

Cerchiamo adesso β in modo che il cambiamento di coordinate

$$\begin{aligned} \tilde{X}_1 &= X_1 \\ \tilde{X}_2 &= X_2 + \beta \end{aligned}$$

elimini il termine di primo grado in X_2 dall'equazione (14). Dalle sostituzioni

$$2(X_2 + \beta)^2 - 2\sqrt{2}(X_2 + \beta) - 1 = 2X_2^2 + (4\beta - 2\sqrt{2})X_2 + 4\beta^2 - 2\sqrt{2}\beta - 1 = 0,$$

ricaviamo $\beta = \sqrt{2}/2$; l'equazione diventa così

$$X_2^2 - 1 = 0.$$

Nel riferimento (X_1, X_2), la conica è costituita dunque dalla coppia di rette parallele di equazioni

$$X_2 = 1 \qquad \text{e} \qquad X_2 = -1.$$

Invertendo il cambiamento di coordinate

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 + \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

usato per portare l'equazione (13) in forma canonica, troviamo

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Ne segue che, nel sistema (x_1, x_2), le rette in questione hanno rispettivamente equazione

$$x_1 + x_2 = (1 + \sqrt{2}) \qquad \text{e} \qquad x_1 + x_2 = (1 - \sqrt{2}).$$

Fig.13. $x_1 + x_2 = 1 + \sqrt{2}$ e $x_1 + x_2 = 1 - \sqrt{2}$.

Esercizi.

(7.A) Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ una matrice reale simmetrica 2×2.

(i) Dimostrare che il polinomio caratteristico di A è uguale a $X^2 - (a + c)X - (ad - b^2)$.

(ii) Dimostrare che gli autovalori di A sono reali.

(iii) Dimostrare che esiste una base ortonormale di $\mathbf{R}^2$ formata da autovettori di A.

(7.B) Fare un disegno delle seguenti coniche:

(i) $X^2 + 2Y^2 = 5$.

(ii) $XY = 4$.

(iii) $X^2 - 4X + Y^2 - 6Y = 3$.

(7.C) Fare un disegno delle seguenti coniche:

(i) $X^2 + 2Y^2 = 0$.
(ii) $XY - 2X + Y = 2$.
(iii) $X^2 - 4X + Y^2 - 6Y + 13 = 0$.

(7.D) Fare un disegno delle seguenti ellissi. Indicarne centro e assi di simmetria.
(i) $X^2 + 4Y^2 = 5$
(ii) $X^2 + XY + Y^2 = 3$.
(iii) $X^2 + 2XY + 10Y^2 - 2X - 2Y = 0$.

(7.E) Fare un disegno delle seguenti iperboli. Indicarne gli asintoti.
(i) $XY = -4$
(ii) $X^2 - 7Y^2 = 7$.
(iii) $X^2 + XY - 2Y^2 - 2X - 2Y = 0$.

(7.F) Fare un disegno delle seguenti coniche.
(i) $X^2 + Y^2 + 2X + 2Y + 1 = 0$
(ii) $X^2 - Y^2 - 2X + 1 = 0$.
(iii) $X^2 + Y^2 + 2X + 2Y + 2 = 0$.
(iv) $X^2 + Y^2 = 4X - 4$.

(7.G) Sia C la conica data dall'equazione $Y^2 = X$.
(i) Determinare l'equazione della conica dopo la traslazione di passo $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Sia C' la conica traslata. Far vedere che il punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ appartiene a C'.
(ii) Determinare l'equazione della conica C' dopo una rotazione di 60 gradi intorno all'origine. Far vedere che l'immagine del punto P è $\begin{pmatrix} 1/2 - \sqrt{3} \\ \sqrt{3}/2 + 1 \end{pmatrix}$.

(7.H) Fare un disegno delle seguenti coniche. Indicarne eventuali asintoti, centro e assi di simmetria
(i)
$$3X^2 - 2XY + 3Y^2 - 10X + 6Y + 8 = 0,$$
(ii)
$$X^2 + 2XY + Y^2 - 4X + 5 = 0.$$

(7.I) Fare un disegno delle seguenti coniche. Indicarne eventuali asintoti, centro e assi di simmetria
(i)
$$X^2 + 6XY + Y^2 - 2X - 6Y = 0,$$
(ii)
$$X^2 + 6XY + Y^2 - 2X - 6Y + 2 = 0.$$

(7.J) Sia $a \in \mathbf{R}_{>0}$ e sia C la parabola data da $Y = aX^2$ e sia $F = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4a} \end{pmatrix}$ il "fuoco" di C.
(i) Calcolare l'equazione della retta passante per F e un punto $P = (x, ax^2)$ su C.
(ii) Adesso vediamo la retta come "un raggio di luce" uscente da F. Calcolare l'equazione del "raggio riflesso" sulla parabola. Far vedere che per ogni punto P il "raggio riflesso" è una retta verticale.

(7.K) Disegnare le seguenti coniche:
(i) $X^2 + Y^2 + XY + X + Y = 1$;
(ii) $5X^2 - 26XY + 5Y^2 + 72 = 0$;
(iii) $X^2 + Y^2 - 2XY - 2Y = 0$;
(iv) $3X^2 - 8XY - 3Y^2 + 10 = 0$.

(7.L) Disegnare le seguenti coniche:
(i) $2Y^2 + 2\sqrt{3}XY - 2\sqrt{3}X + 2Y = 5$;
(ii) $9X^2 + 16Y^2 + 24XY - 40X + 30Y = 0$;

(iii) $3X^2 + 2XY + 3Y^2 + 2\sqrt{2}X - 2\sqrt{2}Y = 0$;
(iv) $2X^2 + 4XY + 5Y^2 - 12 = 0$.

(7.M) Determinare il tipo (affine) delle seguenti coniche:
(i) $2X^2 - 6XY + 4Y^2 + 2X + 4Y - 24 = 0$;
(ii) $4X^2 + 12XY + 9Y^2 + 3X = 4$;
(iii) $7X^2 - 5XY + Y^2 + 8Y = 0$;
(iv) $X^2 + 4XY + 4Y^2 + 2X + 4Y + 5 = 0$;
(v) $X^2 + 3XY + Y^2 + 2X = 0$.

(7.N) (i) Far vedere che i punti $\begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$ appartengono all'iperbole data da $Y^2 - 7X^2 = 1$. Trovare altri punti sull'iperbole con coordinate intere.
(ii) Trovare punti $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ con coordinate intere e positive sull'iperbole

$$Y^2 - 19X^2 = 1.$$

8. Quadriche in $\mathbf{R}^3$.

In questo paragrafo studiamo le quadriche in $\mathbf{R}^3$.

Definizione. *Una quadrica in $\mathbf{R}^3$ è l'insieme dei punti $P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ che soddisfano un'equazione di secondo grado*

$$ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + dx_1x_2 + ex_1x_3 + fx_2x_3 + gx_1 + hx_2 + jx_3 + k = 0,$$

dove $a, b, c, d, e, f, g, h, j, k \in \mathbf{R}$, con a, b, c, d, e, f non tutti nulli.

Come le coniche di $\mathbf{R}^2$, anche le quadriche di $\mathbf{R}^3$ possono avere forme geometriche diverse. Diamo ora un metodo per determinare la struttura geometrica di una quadrica data. Il procedimento è simile a quello seguito nel paragrafo 7 nello studio delle coniche. Alla parte quadratica dell'equazione della quadrica

$$Q\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + dx_1x_2 + ex_1x_3 + fx_2x_3$$

associamo la matrice simmetrica 3×3

$$A = \begin{pmatrix} a & d/2 & e/2 \\ d/2 & b & f/2 \\ e/2 & f/2 & c \end{pmatrix},$$

così da scrivere

$$Q\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \langle A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\rangle = {}^t\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Poiché la matrice A è simmetrica, esiste una base ortonormale $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di A. La matrice del cambiamento di base, dalla base $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ alla base canonica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, è una matrice ortogonale M, contenente i vettori $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ nelle sue colonne. La matrice M ha la proprietà che

$$M^{-1}AM = {}^tMAM = A',$$

ove A' è una matrice diagonale, avente sulla diagonale gli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbf{R}$ di A.

Se $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$ sono le coordinate indotte dalla base $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$, si ha

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Ne segue che

$$\begin{aligned}
Q\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \langle A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rangle \\
&= \langle AM \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}, M \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} \rangle \\
&= \langle M^{-1}AM \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} \rangle \\
&= \langle A' \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} \rangle = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \lambda_3 x_3'^2.
\end{aligned}$$

Dunque, mediante il cambiamento di coordinate (1) otteniamo un'equazione senza termini "misti" di secondo grado

$$\lambda_1 (x'_1)^2 + \lambda_2 (x'_2)^2 + \lambda_3 (x'_3)^2 + g'x'_1 + h'x'_2 + j'x'_3 + k' = 0. \tag{2}$$

Come nel caso delle coniche, procediamo adesso alla semplificazione dei termini di grado uno e di grado zero dell'equazione (2). Poiché il numero dei casi da trattare è rilevante, li suddividiamo in 5 famiglie, e per ognuna di esse discutiamo i relativi sottocasi. Alla fine, avremo 17 tipi diversi di quadriche!

La suddivisione è basata sul *rango della matrice* A, ossia il numero di autovalori non nulli di A, ed *il segno degli autovalori di* A.

Le 5 famiglie sono le seguenti:

I. Il rango di A è uguale a 3 ed i 3 autovalori hanno lo stesso segno.
II. Il rango di A è uguale a 3 ed i 3 autovalori non hanno lo stesso segno.
III. Il rango di A è uguale a 2 ed i 2 autovalori non nulli hanno lo stesso segno.
IV. Il rango di A è uguale a 2 ed i 2 autovalori non nulli non hanno lo stesso segno.
V. Il rango di A è uguale a 1.

I. Moltiplicando eventualmente l'equazione (2) per -1, possiamo assumere che i coefficienti λ_i siano positivi. In questo caso possiamo eliminare i termini lineari tramite una traslazione. Più precisamente, sia

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1'' - \frac{g'}{2\lambda_1} \\ x_2'' - \frac{h'}{2\lambda_2} \\ x_3'' - \frac{j'}{2\lambda_3} \end{pmatrix}.$$

Con questa sostituzione, l'equazione della quadrica diventa

$$\lambda_1(x_1'')^2 + \lambda_2(x_2'')^2 + \lambda_3(x_3'')^2 = k''.$$

A questo punto ci sono tre possibilità:

1. $k'' > 0$. In questo caso, la quadrica è un'*ellissoide.*
2. $k'' = 0$. In questo caso, abbiamo $x_1'' = x_2'' = x_3'' = 0$ e la quadrica consiste nel punto $(0, 0, 0)$.
3. $k'' < 0$. In questo caso la quadrica non ha punti.

II. Possiamo assumere $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ e $\lambda_3 < 0$. Anche in questo caso, possiamo eliminare i termini lineari tramite una traslazione e ridurre l'equazione della quadrica nella forma

$$\lambda_1(x_1'')^2 + \lambda_2(x_2'')^2 + \lambda_3(x_3'')^2 = k''.$$

Anche questa volta ci sono tre possibilità:

4. $k'' > 0$. In questo caso la quadrica è un *iperboloide ad una falda.*
5. $k'' = 0$. In questo caso la quadrica è un *cono.*
6. $k'' < 0$. In questo caso la quadrica è un *iperboloide a due falde.*

III. Possiamo supporre $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ e $\lambda_3 = 0$. Mediante una traslazione, possiamo eliminare i termini lineari che contengono x_1' e x_2'. L'equazione diventa

$$\lambda_1(x_1'')^2 + \lambda_2(x_2'')^2 + j''x_3'' = k''.$$

7. Se il coefficiente j'' non è nullo, possiamo eliminare il termine noto con una traslazione, riducendo l'equazione nella forma

$$\lambda_1(x_1''')^2 + \lambda_2(x_2''')^2 + j''x_3''' = 0.$$

   La quadrica è un *paraboloide ellittico.*

Se $j'' = 0$, cioè l'equazione è della forma

$$\lambda_1(x_1'')^2 + \lambda_2(x_2'')^2 = k'',$$

ci sono tre possibilità:

8. Se $k'' > 0$, la quadrica è un *cilindro ellittico.*
9. Se $k'' = 0$, allora $x_1'' = x_2'' = 0$ e la quadrica coincide con l'asse x_3''.
10. Se $k'' < 0$, allora la quadrica non ha punti.

IV. Possiamo supporre $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ e $\lambda_3 = 0$. Con una traslazione, possiamo eliminare i termini lineari che contengono x_1' e x_2'. L'equazione diventa così

$$\lambda_1(x_1'')^2 + \lambda_2(x_2'')^2 + j''x_3'' = k''.$$

11. Se $j'' \neq 0$ possiamo eliminare il termine noto tramite una traslazione. La quadrica è una *sella.*
12. Se $j'' = 0$ ma $k'' \neq 0$, allora la quadrica è un *cilindro iperbolico.*
13. se $j'' = k'' = 0$, allora la quadrica è l'unione dei due piani incidenti aventi equazioni $x_1'' = \pm\sqrt{-\lambda_2/\lambda_1} \cdot x_2''$.

V. Possiamo supporre che λ_1 sia l'unico autovalore non nullo e che sia positivo. Con una traslazione, possiamo eliminare il termine lineare in x_1'. L'equazione della quadrica diventa

$$\lambda_1(x_1'')^2 + h''x_2'' + j''x_3'' = k''.$$

14. Se h'', j'' non sono entrambi nulli, mediante il cambiamento di coordinate ortogonale

$$\begin{pmatrix} x_1''' \\ x_2''' \\ x_3''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j''/\sqrt{j''^2 + h''^2} & h''/\sqrt{j''^2 + h''^2} \\ 0 & -h''/\sqrt{j''^2 + h''^2} & j''/\sqrt{j''^2 + h''^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix},$$

l'equazione della quadrica diventa $\lambda_1(x_1''')^2 + h'''x_3''' = k''$, dove $h''' \neq 0$. Dopo l'eliminazione del termine noto, con una traslazione, troviamo infine

$$\lambda_1(\tilde{x}_1)^2 + \tilde{h}\tilde{x}_3 = 0.$$

La quadrica è un *cilindro parabolico.*
Se $h'' = j'' = 0$, cioè l'equazione è della forma

$$\lambda_1(x_1'')^2 = k'',$$

ci sono tre casi:

15. Se $k'' > 0$, la quadrica è l'unione dei due piani paralleli di equazioni $x'' = \pm\sqrt{k''/\lambda_1}$.
16. Se $k'' = 0$, la quadrica è l'unione di due piani coincidenti, di equazione $x_1'' = 0$.
17. se $k'' < 0$, la quadrica non ha punti.

Osservazione. Dalla discussione precedente, risulta che, mediante un *cambiamento di coordinate isometrico*, un'equazione di secondo grado nello spazio può essere portata in una e una sola delle 17 forme individuate. Il procedimento descritto si chiama "riduzione della quadrica a forma canonica metrica" e la classificazione prodotta è la "classificazione metrica delle quadriche".

Forma canonica affine di una conica o di una quadrica. Come la riduzione in forma canonica metrica, la riduzione in forma canonica affine di una conica o di una quadrica consiste nella ricerca di un sistema di riferimento rispetto al quale l'equazione che la definisce risulti "più semplice possibile". In questo caso, i cambiamenti di coordinate ammessi non sono necessariamente isometrie, ma trasformazioni affini qualunque

$$\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x} + \mathbf{b},$$

dove A è una matrice invertibile e $\mathbf{b}$ è un vettore. Ad esempio, si ammettono anche le dilatazioni.

Si può dimostrare che, tramite cambiamenti di coordinate affini, l'equazione di una conica o di una quadrica può essere trasformata in una equazione i cui coefficienti siano uguali a $1, -1$ o 0, a seconda del segno o della nullità dei corrispondenti coefficienti nell'equazione canonica metrica. Questa equazione prende il nome di "equazione canonica affine" della conica o della quadrica.

Tabella 14. Lista completa, senza ripetizioni, delle quadriche dello spazio in forma canonica affine.

I.	1.	$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 1$	ellissoide
I.	2.	$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 0$	punto
I.	3.	$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = -1$	$\emptyset$
II.	4.	$X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 = 1$	iperboloide ad una falda
II.	5.	$X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 = 0$	cono
II.	6.	$X_1^2 + X_2^2 - X_3^2 = -1$	iperboloide a due falde
III.	7.	$X_1^2 + X_2^2 + X_3 = 0$	paraboloide ellittico
III.	8.	$X_1^2 + X_2^2 = 1$	cilindro ellittico
III.	9.	$X_1^2 + X_2^2 = 0$	una retta
III.	10.	$X_1^2 + X_2^2 = -1$	$\emptyset$
IV.	11.	$X_1^2 - X_2^2 + X_3 = 0$	sella
IV.	12.	$X_1^2 - X_2^2 = 1$	cilindro iperbolico
IV.	13.	$X_1^2 - X_2^2 = 0$	due piani incidenti
V.	14.	$X_1^2 + X_2 = 0$	cilindro parabolico
V.	15.	$X_1^2 = 1$	due piani paralleli
V.	16.	$X_1^2 = 0$	due piani coincidenti
V.	17.	$X_1^2 = -1$	$\emptyset$

facile verificare che essa può essere ottenuta, mediante una opportuna dilatazione, dall'equazione canonica metrica.

Esempio 8.1. Consideriamo la seguente quadrica in $\mathbf{R}^3$

$$x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_1 - 4x_2 + 4 = 0.$$

La forma quadratica ad essa associata è

$$Q\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 = {}^t\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sono $\lambda = 2, -1, 0$ ed i rispettivi autospazi sono $V_2 = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, $V_{-1} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ e $V_0 = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$. La matrice ortogonale

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

rappresenta il cambiamento di coordinate da una base ortonormale di autovettori di A nella base canonica. Dunque, dalla sostituzione $\mathbf{x} = M\mathbf{x}'$ si ottiene l'equazione della quadrica nelle coordinate x_1', x_2', x_3'

$$2(x_1')^2 - (x_2')^2 - \frac{8}{\sqrt{6}}x_1' - \frac{2}{\sqrt{3}}x_2' - \frac{4}{\sqrt{2}}x_3' + 4 = 0.$$

Mediante una traslazione, possiamo eliminare adesso i termini di primo grado in x_1' e x_2' ed il termine noto. La traslazione è precisamente

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1'' + \frac{2}{\sqrt{6}}, \\ x_2' &= x_2'' - \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ x_3' &= x_3'' + \frac{3}{2\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

e l'equazione che si ottiene

$$2(x_1'')^2 - (x_2'')^2 - 2\sqrt{2}x_3'' = 0$$

rappresenta la forma canonica metrica della quadrica. La quadrica è una *sella.* Tramite il cambiamento di coordinate *affine*

$$\begin{aligned} x_1'' &= \frac{1}{\sqrt{2}}X_1, \\ x_2'' &= X_2, \\ x_3'' &= -\frac{1}{2\sqrt{2}}X_3, \end{aligned}$$

troviamo infine la forma canonica affine della quadrica

$$X_1^2 - X_2^2 + X_3 = 0.$$

Esempio 8.2. Consideriamo la quadrica di equazione

$$x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_2 - 2x_3 + 10 = 0.$$

Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice rappresentativa della corrispondente forma quadratica

$$Q\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2.$$

Gli autovalori e gli autospazi di A sono rispettivamente $\lambda = 2$ con $V_2 = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\right\}$ e $\lambda = 0$ con $V_0 = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. Ne segue che il cambiamento di coordinate ortonormale $\mathbf{x} = M\mathbf{x}'$, ove la matrice M è data da $M = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, porta l'equazione nella forma

$$(x_1')^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_1' + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2' - x_3' + 5 = 0.$$

Adesso, la traslazione

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1'' - \frac{\sqrt{2}}{4}, \\ x_2' &= x_2'' - \frac{39\sqrt{2}}{8}, \\ x_3' &= x_3'', \end{aligned}$$

elimina il termine di primo grado in x_1' ed il termine noto, riducendo l'equazione nella forma

$$4(x_1'')^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}x_2'' - x_3'' = 0.$$

L'equazione canonica metrica della quadrica

$$X_1^2 + \frac{\sqrt{6}}{8}X_2 = 0$$

si ottiene con un ultimo cambiamento di coordinate

$$\begin{aligned} x_1'' &= X_1, \\ x_2'' &= \frac{\sqrt{3}}{3}X_2 + \frac{\sqrt{6}}{3}X_3 \\ x_3'' &= -\frac{\sqrt{6}}{3}X_2 + \frac{\sqrt{3}}{3}X_3. \end{aligned}$$

La quadrica è un cilindro parabolico.

Esercizi.

(8.A) Portare le seguenti quadriche in forma canonica metrica mediante una isometria.

(i) $4Z^2 + 2X + 3Y + 8Z = 0$;
(ii) $3X^2 + 6Y^2 + 2Z^2 + 12X + 12Y + 12Z + 42 = 0$;
(iii) $-3X^2 + 3Y^2 - 12XZ + 12YZ + 4X + 4Y - 2Z = 0$;

(8.B) Portare le seguenti quadriche in forma canonica metrica mediante una isometria.

(i) $7X^2 + 4Y^2 - 2Z^2 - 20XY + 4XZ - 16YZ + 6X + 3Y - 6Z = 0$;
(ii) $40X^2 + 13Y^2 + 45Z^2 + 36XY - 12XZ + 24YZ + 15X - 30Y + 10Z + 7 = 0$.

(8.C) Determinare il tipo (affine) delle seguenti quadriche:

(i) $X^2 + 4XY + 4Y^2 + 2XZ + 4YZ + Z^2 + 8X + 4Z = 0$;
(ii) $X^2 + 6XY - 4XZ + YZ + 4Z^2 + 2X - 4Z + 5 = 0$;
(iii) $3X^2 + 2XY + 2Y^2 + 6YZ + 7Z^2 + 2X + 2Y + 4Z + 1 = 0$;

(8.D) Determinare il tipo (affine) delle seguenti quadriche:

(i) $2X^2 + 8XY - 2Y^2 + 12XZ + 4YZ + 8Z^2 + 4X + 8Y + 12Z + 2 = 0$;
(ii) $2X^2 + 2XY + 3Y^2 - 4XZ + 2YZ + 2X - 2Y + 4Z = 0$.

(8.E) Per ogni $t \in \mathbf{R}$ determinare il tipo (affine) delle seguenti quadriche:

(i) $X^2 + tXY + Y^2 + Z^2 + 2X - 2Y = 0$;
(ii) $X^2 + tXY + Y^2 - 4YZ + Z^2 + 2X - 4Z = 0$;
(iii) $X^2 + Y^2 - Z^2 - 2X - 2Y - 2Z = tXY$.