

## Dispense di Geometria. Capitolo 1.

### 1. Geometria di $\mathbf{R}^2$ .

In questo paragrafo discutiamo le proprietà geometriche elementari del piano. Per avere a disposizione delle *coordinate* nel piano, fissiamo un punto  $\mathbf{0}$ , che chiamiamo *l'origine*. Scegliamo poi due rette perpendicolari che si incontrano in  $\mathbf{0}$ : una retta come asse delle ascisse e l'altra come asse delle ordinate. Fissiamo su di esse un verso ed un'unità di misura. Adesso possiamo introdurre le coordinate nel solito modo: ad un arbitrario punto  $P$  del piano associamo un coppia di numeri reali  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ , ove  $x_1$  indica la proiezione di  $P$  sull'asse delle ascisse e  $x_2$  la proiezione di  $P$  sull'asse delle ordinate.

Fig.1 Il piano  $\mathbf{R}^2$ .

Le coordinate  $x_1$  e  $x_2$  individuano il punto  $P$  in modo unico, così possiamo *identificare* i punti  $P$  del piano con le coppie  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ :

$$P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Per esempio, i punti sull'asse delle ascisse sono quelli che soddisfano l'equazione  $x_2 = 0$ , mentre i punti sull'asse delle ordinate sono quelli che soddisfano l'equazione  $x_1 = 0$ . L'origine  $\mathbf{0}$  è il punto  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . L'insieme delle coppie ordinate  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  si chiama piano cartesiano e si indica con  $\mathbf{R}^2$ :

$$\mathbf{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1, x_2 \in \mathbf{R} \right\}.$$

In seguito, indicheremo con  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  anche il *vettore*  $\mathbf{x}$  uscente dall'origine e di estremo il punto  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ . Per *vettore* si intende un segmento orientato, di cui un estremo rappresenta l'inizio e l'altro la fine. Un vettore può essere raffigurato mediante una freccia. Il vettore  $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , di lunghezza zero, si chiama *vettore nullo*.

Fig.2 Il vettore  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ .

Sarà chiaro dal contesto se  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  andrà visto come un punto del piano o come un vettore uscente da  $\mathbf{0}$  di estremo  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ . Per semplicità di notazione, scriveremo spesso  $\mathbf{x}$  sottintendendo  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ , e similmente  $\mathbf{y}$  per  $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ , etc ... I numeri reali  $\lambda$  verranno anche chiamati *scalari*, per distinguerli dagli "oggetti vettoriali".

**Definizione.** Siano  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  due vettori in  $\mathbf{R}^2$ . Allora la *somma*  $\mathbf{x} + \mathbf{y}$  di  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  è il vettore dato da

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}.$$

Il *vettore opposto* del vettore  $\mathbf{x}$  è il vettore

$$-\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}.$$

La *differenza*  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$  dei vettori  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  è il vettore  $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \end{pmatrix}$ .

**Definizione.** Per  $\lambda \in \mathbf{R}$ , il *prodotto* di  $\mathbf{x}$  per  $\lambda$  è il vettore dato da

$$\lambda \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}.$$

Se  $\lambda > 0$ , il vettore  $\lambda \mathbf{x}$  ha la stessa direzione e lo stesso verso di  $\mathbf{x}$ ; se  $\lambda < 0$ , il vettore  $\lambda \mathbf{x}$  ha la stessa direzione ma verso opposto a quello di  $\mathbf{x}$ . Se infine  $\lambda = 0$ , allora  $\lambda \mathbf{x}$  è il *vettore nullo*  $\mathbf{0}$ .

La somma di due vettori  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  ha un'interpretazione geometrica: trasladando il vettore  $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  fino a farlo uscire dall'estremo  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  di  $\mathbf{x}$ , si ha che il vettore risultante ha come secondo estremo il punto di coordinate  $\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$ .

Fig.3 La somma  $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ .

Questo procedimento per trovare la somma di due vettori si chiama *regola del parallelogramma*: infatti, il vettore somma  $\mathbf{x} + \mathbf{y}$  coincide con la diagonale del parallelogramma costruito sui vettori  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ .

Fig.4 La regola del parallelogramma.

Similmente, la differenza di  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  si trova trasladando il vettore  $-\mathbf{y}$  fino a farlo uscire dall'estremo  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  di  $\mathbf{x}$ . Nota che il vettore  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$  è parallelo al segmento congiungente  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  e  $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  ed ha

la sua stessa lunghezza.

Fig.5 La differenza  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ .

La somma fra vettori e la moltiplicazione dei vettori per gli scalari godono delle seguenti proprietà:

**Proposizione 1.1.**

(i) (Proprietà associativa della somma) Per ogni  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{R}^2$

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z});$$

(ii) (Proprietà commutativa) Per ogni  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^2$

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x};$$

(iii) (Proprietà associativa del prodotto) Per ogni  $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$

$$\lambda(\mu\mathbf{x}) = (\lambda\mu)\mathbf{x};$$

(iv) (Proprietà distributiva) Per ogni  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^2$  e  $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$

$$\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y},$$

$$(\lambda + \mu)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x}.$$

**Dimostrazione.** Queste proprietà sono semplici conseguenze delle analoghe proprietà dei numeri reali.

**Definizione.** (Prodotto scalare.) Dati due vettori  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  in  $\mathbf{R}^2$  il *prodotto scalare*  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$  è il numero reale dato da

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2.$$

Il prodotto scalare è molto importante nello studio della geometria del piano  $\mathbf{R}^2$ . Esso gode delle seguenti proprietà

**Proposizione 1.2.**

(i) (Proprietà commutativa) Per ogni  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^2$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x};$$

(ii) (Proprietà distributiva) Per ogni  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{R}^2$

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z};$$

(iii) (Omogeneità) Per ogni  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^2$  ed ogni  $\lambda \in \mathbf{R}$

$$\lambda(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = (\lambda\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (\lambda\mathbf{y});$$

(iv) (Positività) Per ogni  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} &\geq 0, \\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} &= 0 \quad \text{se e soltanto se} \quad \mathbf{x} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

**Dimostrazione.** Il punto (i) segue da

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + x_2y_2 = y_1x_1 + y_2x_2 = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}.$$

Il punto (ii) segue da

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) &= x_1(y_1 + z_1) + x_2(y_2 + z_2) = \\ &= x_1y_1 + x_2y_2 + x_1z_1 + x_2z_2 = \\ &= \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}. \end{aligned}$$

Confrontando le quantità

$$\begin{aligned} \lambda(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) &= \lambda(x_1y_1 + x_2y_2) = \lambda x_1y_1 + \lambda x_2y_2, \\ (\lambda\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} &= (\lambda x_1)y_1 + (\lambda x_2)y_2 = \lambda x_1y_1 + \lambda x_2y_2, \\ \mathbf{x} \cdot (\lambda\mathbf{y}) &= x_1(\lambda y_1) + x_2(\lambda y_2) = \lambda x_1y_1 + \lambda x_2y_2, \end{aligned}$$

otteniamo (iii). Per dimostrare (iv), osserviamo che

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = x_1^2 + x_2^2.$$

Poiché i quadrati di numeri reali sono sempre non negativi, si ha che  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0$ . Se  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , chiaramente  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0$ . Viceversa, se per un vettore  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$  vale  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0$ , allora  $x_1^2 + x_2^2 = 0$ . Ciò è possibile solo se  $x_1 = x_2 = 0$  e la dimostrazione della proposizione è completa.

**Definizione.** La norma  $\|\mathbf{x}\|$  di un vettore  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$  è definita da

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Per il Teorema di Pitagora, la norma del vettore  $\mathbf{x}$  è uguale alla lunghezza del segmento congiungente i suoi estremi  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  e  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ . Equivalentemente, la norma di  $\mathbf{x}$  è la distanza del punto  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  dall'origine  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Fig.6 Il Teorema di Pitagora.

Analogamente, dalla Fig.5 vediamo che  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$  è la distanza fra i punti  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  e  $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ . Usando la norma, diamo un'interpretazione geometrica del prodotto scalare fra vettori (per le definizioni di *seno* e *coseno* si veda l'Eserc. 1.B).

**Proposizione 1.3.** *Siano  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  due vettori in  $\mathbf{R}^2$ .*

(i) *Allora*

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cos \varphi,$$

*dove  $\varphi$  è l'angolo fra i vettori  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ .*

(ii) *I vettori  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  sono perpendicolari se e soltanto se  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$ .*

**Dimostrazione.** Consideriamo il triangolo di vertici i punti  $\mathbf{0}$ ,  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ .

Fig.7 La regola del coseno.

Dalla Fig.5, vediamo che i lati del triangolo hanno lunghezze  $\|\mathbf{x}\|$ ,  $\|\mathbf{y}\|$  e  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ . Applicando la regola del coseno (vedi Eserc.1.C), troviamo

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cos \varphi.$$

Dalla definizione stessa della norma abbiamo

$$(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - 2\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cos \varphi$$

e quindi

$$-2x_1y_1 - 2x_2y_2 = -2\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cos \varphi$$

come richiesto. Per la parte (ii), osserviamo che  $\cos \varphi = 0$  se e soltanto se  $\varphi = \pm\pi/2$ , cioè se e soltanto se  $\varphi$  è un angolo retto.

**Corollario 1.4.** (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz). Siano  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  vettori in  $\mathbf{R}^2$ . Allora

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|.$$

**Dimostrazione.** Questo segue dal fatto che  $|\cos \varphi| \leq 1$ . (Vedi l'Eserc.1.B).

**Proposizione 1.5.** Siano  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  vettori in  $\mathbf{R}^2$ . Allora

(i) (Disuguaglianza triangolare)

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|;$$

(ii) Per ogni  $\lambda \in \mathbf{R}$

$$\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\|.$$

**Dimostrazione.** Diamo due dimostrazioni del punto (i). La prima è geometrica e la seconda è algebrica. Dalla Fig.3 segue che il triangolo di vertici  $\mathbf{0}$ ,  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x} + \mathbf{y}$  ha lati di lunghezza  $\|\mathbf{x}\|$ ,  $\|\mathbf{y}\|$  e  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|$  rispettivamente. È chiaro che la somma delle lunghezze di due qualunque dei lati di un triangolo è maggiore o uguale della lunghezza del terzo lato: se non fosse così, il triangolo non si “chiuderebbe”. In particolare

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$$

come richiesto. La seconda dimostrazione usa la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz del Cor.1.4. Abbiamo

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 &= (x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 \\ &= x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 + 2(x_1y_1 + x_2y_2) \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \\ &\leq \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| = (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2. \end{aligned}$$

Poiché  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|$  e  $\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$  sono numeri non negativi, possiamo estrarne le radici quadrate e ottenere la disuguaglianza triangolare.

Per la parte (ii), calcoliamo

$$\|\lambda\mathbf{x}\|^2 = (\lambda x_1)^2 + (\lambda x_2)^2 = \lambda^2(x_1^2 + x_2^2) = \lambda^2\|\mathbf{x}\|^2.$$

Estraendo la radici quadrate, troviamo

$$\|\lambda\mathbf{x}\| = \sqrt{\lambda^2} \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\|$$

come richiesto.

Come applicazione del prodotto scalare, determiniamo adesso la *proiezione ortogonale* di un vettore  $\mathbf{x}$  su una retta  $l$ , passante per  $\mathbf{0}$  e per un vettore non nullo  $\mathbf{y}$ .

Fig.8 La proiezione su  $l$ .

**Proposizione 1.6.** *Siano  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  vettori in  $\mathbf{R}^2$ . Supponiamo che  $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ . La proiezione ortogonale  $\pi(\mathbf{x})$  di  $\mathbf{x}$  sulla retta passante per  $\mathbf{0}$  e  $\mathbf{y}$  è un multiplo  $c\mathbf{y}$  di  $\mathbf{y}$ . Il valore dello scalare  $c \in \mathbf{R}$  è*

$$c = \frac{\|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{y}\|} \cos \varphi = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{y}\|^2}.$$

**Dimostrazione.** Poiché la proiezione è ortogonale, abbiamo che

$$(\pi(\mathbf{x}) - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = 0.$$

Con la sostituzione  $\pi(\mathbf{x}) = c\mathbf{y}$ , troviamo

$$0 = (\pi(\mathbf{x}) - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = (c\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = c\mathbf{y} \cdot \mathbf{y} - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = c\|\mathbf{y}\|^2 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y},$$

da cui  $c = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})/\|\mathbf{y}\|^2$  come richiesto. Poiché  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| \cos \varphi$ , la costante  $c$  è anche uguale a  $c = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| \cos \varphi / \|\mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|/\|\mathbf{y}\| \cdot \cos \varphi$ . Questo conclude la dimostrazione della proposizione.

Dati due vettori  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ , calcoliamo infine l'*area del triangolo* di vertici  $\mathbf{0}$ ,  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ .

Fig.9. Il triangolo di vertici  $\mathbf{0}$ ,  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ .

**Proposizione 1.7.** L'area del triangolo di vertici  $\mathbf{0}$ ,  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  è data da

$$\frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|.$$

**Dimostrazione.** Sia  $A$  l'area del triangolo. Poiché l'altezza del triangolo è uguale a  $\|\mathbf{y}\| \sin \varphi$ , l'area è dunque uguale a

$$A = \frac{1}{2}\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \sin \varphi.$$

Allora

$$\begin{aligned}(2A)^2 &= \|\mathbf{x}\|^2 \cdot \|\mathbf{y}\|^2 \sin^2 \varphi = \|\mathbf{x}\|^2 \cdot \|\mathbf{y}\|^2 (1 - \cos^2 \varphi) \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 \cdot \|\mathbf{y}\|^2 - (\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cos \varphi)^2 \\ &= (x_1^2 + x_2^2)(y_1^2 + y_2^2) - (x_1y_1 + x_2y_2)^2 \\ &= (x_1y_2 - x_2y_1)^2.\end{aligned}$$

Estraendo le radici quadrate troviamo

$$2A = |x_1y_2 - x_2y_1|$$

come richiesto.

Osserviamo che l'espressione  $2A = |x_1y_2 - x_2y_1|$  è uguale all'area del parallelogramma di vertici  $\mathbf{0}$ ,  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  e  $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ .

Fig.10. Il parallelogramma di vertici  $\mathbf{0}$ ,  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  e  $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ .

Osserviamo infine che l'espressione  $x_1y_2 - x_2y_1$  è uguale al *determinante* della matrice  $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$ .

### Esercizi.

(1.A) Siano  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  e  $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ .

- (i) Calcolare e disegnare i vettori  $\mathbf{x}$ ,  $2\mathbf{x}$ ,  $-\mathbf{x}$ ,  $0\mathbf{x}$ .
- (ii) Calcolare e disegnare i vettori  $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ ,  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ ,  $3\mathbf{y}$ ,  $-\mathbf{x}$  e  $3\mathbf{x} - \mathbf{y}$ .
- (iii) Calcolare  $\|\mathbf{x}\|$ ,  $\|\mathbf{y}\|$ ,  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|$  e  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ .

(1.B) (*Trigonometria elementare*) Sia  $\varphi \in \mathbf{R}$  un angolo. Il *seno* ed il *coseno* di  $\varphi$  sono, per definizione, le coordinate del vettore  $\mathbf{x}$  di norma  $\|\mathbf{x}\| = 1$ , che forma un angolo  $\varphi$  con l'asse delle ascisse positive.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

Fig.11 Seno e coseno.

- (i) Dimostrare che  $|\sin \varphi| \leq 1$  e  $|\cos \varphi| \leq 1$ .
  - (ii) Dimostrare che  $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$ .
- (1.C) (*La regola del coseno*) Sia  $ABC$  un triangolo con lati di lunghezza  $a, b, c$  ed angoli  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$ . Sia  $Q$  la proiezione ortogonale di  $C$  sul lato  $AB$ .

Fig.12 La regola del coseno.

- (i) Far vedere che  $|CQ| = b \sin \alpha$  e  $|AQ| = b \cos \alpha$ .
- (ii) Applicare il Teorema di Pitagora al triangolo  $CQB$  e dedurre la relazione

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

(1.D) Siano  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$  e  $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

- (i) Calcolare il coseno dell'angolo  $\varphi$  fra i vettori  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ .
- (ii) Calcolare il coseno dell'angolo  $\varphi$  fra i vettori  $\mathbf{x}$  e  $-\mathbf{y}$ .
- (iii) Calcolare il coseno dell'angolo  $\varphi$  fra i vettori  $\mathbf{x}$  e  $-2\mathbf{y}$ .

(1.E) Sia  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ . Trovare un vettore  $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^2$  tale che l'angolo fra  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  sia uguale a  $\pi/3$ .

(1.F) Siano  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  e  $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

- (i) Calcolare l'area del triangolo di vertici  $\mathbf{0}, \mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ .
- (ii) Calcolare l'area del parallelogramma di vertici  $\mathbf{0}, \mathbf{x}, \mathbf{y}$  e  $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ .
- (iii) Calcolare l'area del parallelogramma di vertici  $\mathbf{0}, \mathbf{x}, -\mathbf{y}$  e  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ .

(1.G) Siano  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$  e  $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ . Calcolare l'area del triangolo di vertici  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  e  $\mathbf{z}$ .

(1.H) Trovare  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^2$  non nulli tali che

(i)  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ .

(ii)  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = 0$ .

(iii)  $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\| = \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|$ .

(1.I) Siano  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^2$  e sia  $\mathbf{p}$  il vettore

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} (x_1 + y_1)/2 \\ (x_2 + y_2)/2 \end{pmatrix}.$$

(i) Calcolare la distanza  $\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|$  di  $\mathbf{p}$  da  $\mathbf{x}$  e la distanza  $\|\mathbf{y} - \mathbf{p}\|$  di  $\mathbf{p}$  da  $\mathbf{y}$ .

(ii) Calcolare la distanza  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$  da  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{y}$ . Far vedere che

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| + \|\mathbf{y} - \mathbf{p}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

(iii) Dedurre che  $\mathbf{p}$  è il punto medio fra  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ .

(1.J) Sia  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$  e sia  $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix}$ .

(i) Calcolare  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ .

(ii) Dimostrare che

$$\cos(\varphi - \psi) = \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi.$$

(1.K) Dimostrare che

$$\cos(\varphi + \psi) = \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi,$$

$$\sin(\varphi - \psi) = \sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi,$$

$$\sin(\varphi + \psi) = \sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \psi.$$

(Suggerimento: usare l'Eserc.2.A).

(1.L) Siano  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 55 \\ 89 \end{pmatrix}$  e  $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 89 \\ 144 \end{pmatrix}$ .

(i) Calcolare l'area del triangolo di vertici  $\mathbf{0}$ ,  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ .

(ii) Trovare  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^2$  con  $x_1, x_2, y_1, y_2 > 1000$  tali che il triangolo di vertici  $\mathbf{0}$ ,  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  abbia area 1.

(1.M) Sia  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$  un vettore non nullo. Dimostrare che  $\mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$  è un vettore di norma 1.

## 2. Rette in $\mathbf{R}^2$ ; circonferenze.

In questo paragrafo studiamo le rette e le circonferenze in  $\mathbf{R}^2$ . Ci sono due modi per descrivere una retta in  $\mathbf{R}^2$ : mediante una *equazione cartesiana* oppure mediante una *equazione parametrica*.

Una *equazione cartesiana* di una retta ha la forma

$$ax_1 + bx_2 + c = 0,$$

dove  $a, b, c \in \mathbf{R}$  ed  $a, b$  non sono entrambi nulli. La retta consiste nei punti  $\mathbf{x}$  le cui coordinate soddisfano l'equazione suddetta. Per esempio, per  $a = 2$ ,  $b = -3$  e  $c = 1$  abbiamo la retta

$$r : 2x_1 - 3x_2 + 1 = 0.$$

Fig.13 La retta  $r : 2x_1 - 3x_2 + 1 = 0$ .

Per ogni  $x_1 \in \mathbf{R}$ , c'è un unico punto  $\mathbf{x}$  sulla retta  $r$  con la prima coordinata uguale a  $x_1$ . L'altra coordinata di  $\mathbf{x}$  è data da  $x_2 = (2x_1 + 1)/3$ . Per esempio, i punti  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  e  $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$  stanno tutti sulla retta  $r$ . Nota bene che due equazioni distinte possono descrivere la stessa retta: per ogni  $\lambda \in \mathbf{R}$  non nullo, le equazioni

$$ax_1 + bx_2 + c = 0 \quad \text{e} \quad \lambda ax_1 + \lambda bx_2 + \lambda c = 0$$

descrivono la stessa retta. Sia l'equazione  $20x_1 - 30x_2 + 10 = 0$  che l'equazione  $2x_1 - 3x_2 + 1 = 0$  descrivono la retta  $r$ .

Una *equazione parametrica* di una retta ha la forma

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 + tv_1 \\ p_2 + tv_2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R},$$

ove  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$  è un punto sulla retta e  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$  è un vettore parallelo alla retta.

Al variare del parametro  $t \in \mathbf{R}$ , il punto  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  varia fra tutti i punti della retta; il punto  $\mathbf{p}$  corrisponde a  $t = 0$ . Per  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  e  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  troviamo ad esempio la retta

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R},$$

Fig.14 La retta  $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

Assegnando al parametro  $t \in \mathbf{R}$  i valori  $t = 0$ ,  $t = 1$  e  $t = -1/3$  troviamo rispettivamente i punti di coordinate

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che due equazioni parametriche

$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v}, \quad t \in \mathbf{R} \quad \text{e} \quad \mathbf{x} = \mathbf{p}' + s\mathbf{v}', \quad s \in \mathbf{R}$$

descrivono la stessa retta  $l$ , ogni volta che  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{p}'$  sono punti di  $l$  ed i vettori  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{v}'$  sono paralleli ad  $l$ . Ciò accade precisamente quando  $\mathbf{v}' = \lambda\mathbf{v}$  per qualche  $\lambda \in \mathbf{R}$ , non nullo. Per esempio, le equazioni parametriche

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}$$

descrivono la retta  $r$ .

**Definizione.** Un vettore *normale* ad una retta è un vettore  $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$  che è perpendicolare alla retta.

Fig.15 La retta  $r : 2x_1 - 3x_2 + 1 = 0$ ; un vettore normale ad  $r$ .

**Proposizione 2.1.** Sia  $l$  la retta di equazione cartesiana

$$ax_1 + bx_2 = c.$$

Allora, il vettore  $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  è un vettore normale ad  $l$ .

**Dimostrazione.** Notiamo che  $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  non è zero perchè  $a, b$  non sono entrambi nulli. Verifichiamo che  $\mathbf{n}$  è perpendicolare alla retta. Siano  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  due punti distinti della retta. Allora il vettore  $\mathbf{y} - \mathbf{x}$  è parallelo alla retta.

Fig.16 Il vettore  $\mathbf{y} - \mathbf{x}$  è parallelo alla retta.

Calcolando il prodotto scalare  $(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}$ , troviamo

$$\begin{aligned} (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n} &= \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (x_1 - y_1)a + (x_2 - y_2)b \\ &= (ax_1 + bx_2) - (ay_1 + by_2) = c - c = 0. \end{aligned}$$

Dunque la retta  $l$  ed il vettore  $\mathbf{n}$  sono perpendicolari, come richiesto.

Dalla proposizione segue in particolare che il vettore  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$  è parallelo alla retta  $l$ .

Negli esempi che seguono, applichiamo i concetti fin qui esposti alla risoluzione di alcuni problemi geometrici nel piano.

**Esempio 2.2.** (*La retta per due punti distinti*) Siano dati due punti distinti  $\mathbf{q}$  e  $\mathbf{q}'$  in  $\mathbf{R}^2$ . Come calcolare un'equazione parametrica e un'equazione cartesiana della retta  $l$  passante per  $\mathbf{q}$  e  $\mathbf{q}'$ ? Per ottenere un'equazione parametrica di  $l$ , basta trovare un punto  $\mathbf{p}$  su  $l$  e un vettore  $\mathbf{v}$  parallelo ad  $l$ . Ad esempio, dati i punti

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}' = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix},$$

prendiamo

$$\mathbf{p} = \mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \mathbf{q} - \mathbf{q}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Otteniamo così l'equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Per trovare un'equazione cartesiana della retta  $l$ , determiniamo  $a$ ,  $b$ ,  $c$  in modo che l'equazione  $ax_1 + bx_2 = c$  sia soddisfatta dai punti dati. Nel caso in questione, dobbiamo risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} a + 2b = c \\ -2a + 4b = c. \end{cases}$$

Troviamo  $a = c/4$  e  $b = 3c/8$ , ed un'equazione cartesiana di  $l$  è per esempio

$$2x_1 + 3x_2 = 8.$$

**Osservazione.** Possiamo anche ricavare un'equazione cartesiana di  $l$  a partire da quella parametrica, eliminando  $t$  dalle due equazioni

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + 3t, \\ y_1 &= 2 - 2t. \end{aligned}$$

In questo modo, troviamo  $t = (x_1 - 1)/3 = (y_1 - 2)/(-2)$  e quindi  $2x_1 + 3y_1 - 8 = 0$ .

**Osservazione.** Per passare da un'equazione cartesiana ad un'equazione parametrica di una data retta, basta scegliere due punti distinti sulla retta e fare il calcolo dell'Esempio 2.2.

Date due rette in  $\mathbf{R}^2$  ci sono tre possibilità: le rette si intersecano in un punto, sono parallele oppure coincidono. Per determinare quale situazione si verifichi, ci si riduce sempre a studiare un sistema di equazioni lineari. Se il sistema non ha soluzioni, le due rette sono parallele; se ha un'unica soluzione, le due rette si intersecano in un unico punto e se il sistema ammette infinite soluzioni, le due rette coincidono.

**Esempio 2.3.** (*Intersezioni fra rette*)

1. Siano  $l$  e  $m$  due rette di equazioni cartesiane

$$2x_1 - 3x_2 + 1 = 0, \quad 4x_1 - 6x_2 = 0.$$

Per trovarne l'intersezione risolviamo il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -1 \\ 4x_1 - 6x_2 = 0. \end{cases}$$

Vediamo che 2 volte la prima equazione meno la seconda ci da  $2(2x_1 - 3x_2) - (4x_1 - 6x_2) = 2 \cdot -1 - 0$ , cioè  $0 = -1$ . Siccome questo è assurdo, il sistema non ha soluzioni e le due rette sono parallele.

2. Siano  $l$  e  $m$  due rette di equazioni

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}, \quad \text{e} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbf{R}.$$

Per calcolarne l'intersezione, imponiamo ad un generico punto  $\mathbf{x}$  di appartenere sia ad  $l$  che a  $m$ ; cerchiamo dunque  $t$  ed  $s$  tali che

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 + t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3s \\ 1 - 2s \end{pmatrix}.$$

Questo ci dà un sistema di due equazioni nelle due incognite  $t$  ed  $s$

$$\begin{cases} 3s & = 1 \\ t + 2s & = -1. \end{cases}$$

Si vede facilmente che l'unica soluzione è data da  $t = -5/3$  ed  $s = 1/3$ , corrispondente al punto in comune  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ .

3. Sia  $l$  la retta di equazione cartesiana  $x_1 - 3x_2 + 2 = 0$  e sia  $m$  la retta di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Per trovare l'intersezione fra  $l$  ed  $m$ , sostituiamo il generico punto di  $m$ , di coordinate  $x_1 = 1+3t$  e  $x_2 = 1+t$  nell'equazione di  $l$ . Troviamo  $(1+3t) - 3(1+t) + 2 = 0$ , cioè  $0 = 0$ . Questa equazione è dunque soddisfatta per *ogni* valore di  $t$ . In altre parole, tutti i punti di  $m$  soddisfano l'equazione di  $l$  e le due rette coincidono.

**Esempio 2.4.** (*Rette ortogonali*) Data una retta  $l$  e un punto  $\mathbf{q}$ , come calcolare un'equazione della retta  $m$  perpendicolare a  $l$  e passante per  $\mathbf{q}$ ? Per avere un'equazione parametrica  $\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v}$  di  $m$ , abbiamo bisogno di un punto  $\mathbf{p}$  su  $m$  e di un vettore parallelo ad  $m$ . Poiché  $m$  deve passare per  $\mathbf{q}$ , possiamo prendere  $\mathbf{p} = \mathbf{q}$  e, poiché  $m$  deve essere perpendicolare ad  $l$ , il vettore  $\mathbf{v}$  deve essere perpendicolare ad  $l$ .

Ad esempio, sia  $l$  la retta di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}$$

e sia  $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ . In questo caso, prendiamo  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$  per  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ , che è ortogonale a  $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$  e ad  $l$ . Un'equazione parametrica per la retta  $m$  è dunque

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbf{R}.$$

Fig.17 La retta per  $\mathbf{q}$  perpendicolare ad  $l$ .

**Osservazione.** Se nell'Esempio 2.4 la retta  $l$  fosse stata in forma cartesiana  $ax_1 + bx_2 + c = 0$ , sarebbe stato ancora più facile trovare un vettore  $\mathbf{v}$  normale ad  $l$ : per la Prop.2.1, avremmo potuto prendere direttamente  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ .

**Esempio 2.5.** (*Distanza di un punto da una retta*) Dati una retta  $l$  e un punto  $\mathbf{q}$ , come calcolare la distanza di  $\mathbf{q}$  da  $l$ ? Per trovare la distanza fra  $\mathbf{q}$  ed  $l$ , calcoliamo la proiezione  $\mathbf{q}'$  del punto  $\mathbf{q}$  su  $l$ . Il punto  $\mathbf{q}'$  non è altro che l'intersezione di  $l$  con la retta perpendicolare ad  $l$  passante per  $\mathbf{q}$ . La distanza di  $\mathbf{q}$  da  $l$  è data esattamente da

$$d(\mathbf{q}, l) = d(\mathbf{q}, \mathbf{q}').$$

Se prendiamo, ad esempio,  $\mathbf{q}$  ed  $l$  come nell'Esempio 2.4, il punto  $\mathbf{q}'$  è dato dall'intersezione di  $l$  con la retta  $m$ . Basta dunque calcolare questa intersezione risolvendo il sistema

$$\begin{cases} 1 + 3t = 1 + 4s \\ 2 + 4t = -3 - 3s. \end{cases}$$

La soluzione è data da  $t = -4/5$  e  $s = -3/5$ , corrispondente al punto  $\mathbf{q}' = \begin{pmatrix} -7/5 \\ -6/5 \end{pmatrix}$ ; la distanza fra  $\mathbf{q}$  ed  $l$  è dunque

$$d(\mathbf{q}, l) = d(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = \sqrt{(1 + 7/5)^2 + (-3 + 6/5)^2} = 3.$$

Fig.18 La distanza fra  $\mathbf{q}$  ed  $l$ .

**Osservazione.** (*Formula della distanza punto retta*) Se la retta  $l$  è data in forma cartesiana

$$ax_1 + bx_2 + c = 0,$$

un'equazione parametrica della retta  $m$ , perpendicolare ad  $l$  e passante per  $\mathbf{q}$ , è data da

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

L'intersezione  $l \cap m$  è data dal punto

$$\mathbf{q}' = \begin{pmatrix} q_1 - a \frac{aq_1 + bq_2 + c}{a^2 + b^2} \\ q_2 - b \frac{aq_1 + bq_2 + c}{a^2 + b^2} \end{pmatrix},$$

corrispondente al valore del parametro

$$t = -\frac{aq_1 + bq_2 + c}{a^2 + b^2}.$$

Risulta così che la distanza di  $\mathbf{q}$  da  $l$  è data dalla formula

$$d(\mathbf{q}, l) = \frac{|aq_1 + bq_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

**Osservazione.** Analogamente, per calcolare la distanza fra due rette parallele, basta scegliere un punto  $P$  su una delle due rette e calcolare la distanza di  $P$  dall'altra retta.

**Definizione.** Una *circonferenza* in  $\mathbf{R}^2$  di centro  $\mathbf{c}$  e raggio  $r$  è l'insieme dei punti che ha distanza uguale ad  $r$  da  $\mathbf{c}$ .

Fig.19 La circonferenza di centro  $\mathbf{c}$  e raggio  $r$ .

Poiché i punti  $\mathbf{x}$  sulla circonferenza di centro  $\mathbf{c}$  e raggio  $r$  sono esattamente quelli che soddisfano

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{c}\| = r,$$

e l'equazione della circonferenza risulta

$$(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 = r^2.$$

Date una retta ed una circonferenza nel piano, ci sono tre possibilità: si intersecano in due punti, si intersecano in un unico punto e la retta è tangente alla circonferenza, oppure non si intersecano affatto. Se la circonferenza ha equazione  $(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 = r^2$  e la retta ha equazione  $ax_1 + bx_2 = c$ , si tratta di risolvere il sistema (non lineare)

$$\begin{cases} (x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 = r^2 \\ ax_1 + bx_2 = c. \end{cases}$$

**Esempio 2.6.** (*Intersezione fra una retta e una circonferenza*) Consideriamo, ad esempio, la circonferenza  $C$  di equazione

$$(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 = 9$$

e la retta  $l$  di equazione  $x_1 - x_2 + 2 = 0$ . L'intersezione  $C \cap l$  è data dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 = 9 \\ x_1 - x_2 + 2 = 0. \end{cases}$$

Sostituendo nella prima equazione la relazione  $x_1 = x_2 - 2$ , troviamo  $x_2 = 4$  e  $x_2 = 1$ . I due punti di intersezione corrispondenti sono quindi

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo adesso l'intersezione di  $C$  con la retta  $m$  di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Sostituendo il punto generico della retta  $m$  nell'equazione della circonferenza, troviamo  $(-t-2)^2 + ((t-10)-1)^2 = 9$ , ossia l'equazione

$$t^2 - 9t + 58 = 0.$$

Poiché questa equazione non ha soluzioni reali, la circonferenza  $C$  e la retta  $m$  non si incontrano.

Fig.20. La circonferenza  $C$  e le rette  $l$  ed  $m$ .

**Osservazione.** (*Intersezione di due circonferenze*) Per calcolare l'intersezione di due circonferenze  $C$  di equazione  $(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 = r^2$  e  $C'$  di equazione  $(x_1 - g_1)^2 + (x_2 - g_2)^2 = R^2$ , bisogna risolvere il sistema non lineare

$$\begin{aligned} (x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 &= r^2 \\ (x_1 - g_1)^2 + (x_2 - g_2)^2 &= R^2. \end{aligned}$$

Osserviamo innanzitutto che, se le circonferenze hanno lo stesso centro, o coincidono o non si incontrano mai. Supponiamo allora che le circonferenze non abbiano lo stesso centro. Sottraendo le due equazioni una dall'altra otteniamo un'equazione di primo grado

$$2(g_1 - c_1)x_1 + 2(g_2 - c_2)x_2 = r^2 - R^2 + (g_1^2 - c_1^2) + (g_2^2 - c_2^2).$$

Geometricamente, questa equazione definisce una retta  $l$ , perpendicolare al vettore  $\mathbf{g} - \mathbf{c}$ . I punti di intersezione fra le due circonferenze sono esattamente i punti di intersezione di  $l$  con una di esse.

**Proposizione 2.7.** Sia  $(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 = r^2$  una circonferenza  $C$  in  $\mathbf{R}^2$  di centro  $\mathbf{c}$  e raggio  $r$ . Un'equazione della retta tangente alla circonferenza nel punto  $\mathbf{q} \in C$  è data da

$$(q_1 - c_1)(x_1 - q_1) + (q_2 - c_2)(x_2 - q_2) = 0.$$

**Dimostrazione.** Sia  $\mathbf{x}$  un punto arbitrario su detta tangente. Poiché la tangente in  $\mathbf{q}$  è perpendicolare alla retta passante per  $\mathbf{q}$  ed il centro della circonferenza  $\mathbf{c}$ , si ha che

$$(\mathbf{q} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{x}) = 0$$

come richiesto.

Fig.21 La retta tangente alla circonferenza nel punto  $\mathbf{q}$ .

**Esempio 2.8.** (*Rette tangenti ad una circonferenza*) Siano dati una circonferenza  $C$  e un punto  $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^2$  che non appartiene a  $C$ . Come calcolare le tangenti a  $C$  uscenti da  $\mathbf{p}$ ? Osserviamo innanzitutto che se  $\mathbf{p}$  è interno alla circonferenza, di tangenti a  $C$  uscenti da  $\mathbf{p}$  non ne esistono; se invece  $\mathbf{p}$  è esterno alla circonferenza, esistono esattamente due rette tangenti a  $C$  uscenti da  $\mathbf{p}$ . Siano  $\mathbf{q}$  e  $\mathbf{q}'$  i corrispondenti punti di tangenza. Allora  $\mathbf{q}$  e  $\mathbf{q}'$  devono stare sulla circonferenza  $C$  e al tempo stesso sulla circonferenza  $C'$ , di centro  $\mathbf{p}$  e raggio  $R = \sqrt{d(\mathbf{c}, \mathbf{p})^2 - r^2}$ . In altre parole,  $\mathbf{q}$  e  $\mathbf{q}'$  sono i punti di intersezione di  $C \cap C'$ .

Sia ad esempio  $C$  la circonferenza data da

$$(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 = 9$$

e sia  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ , un punto esterno a  $C$ . Allora le tangenti a  $C$  uscenti da  $\mathbf{p}$  sono le rette  $r_1$ , per  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q}$ , ed  $r_2$ , per  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q}'$ , ove  $\mathbf{q}$  e  $\mathbf{q}'$  sono dati dall'intersezione delle circonferenze  $C$  e  $C'$

$$\begin{cases} (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 = 9 \\ (x_1 + 1)^2 + (x_2 - 5)^2 = 16. \end{cases}$$

Sottraendo le due equazioni una dall'altra, troviamo l'equazione della retta  $l$

$$3x_1 - 4x_2 + 7 = 0$$

che incontra  $C$  e  $C'$  nei punti  $\mathbf{q}$  e  $\mathbf{q}'$ . Per esempio, intersecando  $l$  con  $C$ , troviamo

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{q}' = \begin{pmatrix} 71/25 \\ 97/25 \end{pmatrix}.$$

Le tangenti cercate sono così

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 96/25 \\ -28/25 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbf{R}.$$

Fig.22 Le tangenti alla circonferenza  $C$  uscenti da  $\mathbf{p}$ .

**Osservazione.** Per la Prop.2.7, la tangente a  $C$  in un generico punto  $\mathbf{q} \in C$  è data da

$$(q_1 - 2)(x_1 - q_1) + (q_2 - 1)(x_2 - q_2) = 0.$$

Poiché le tangenti cercate devono passare per il punto dato  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ , le coordinate di  $\mathbf{q}$  devono anche soddisfare la relazione

$$(q_1 - 2)(-1 - q_1) + (q_2 - 1)(5 - q_2) = 0.$$

E' facile verificare che questa non è altro che la condizione  $\mathbf{q} \in C'$ .

### Esercizi.

(2.A) Sia  $\mathbf{x}$  il vettore dell'Eserc.1.B:  $\mathbf{x}$  ha norma  $\|\mathbf{x}\| = 1$  e forma un angolo  $\varphi$  con l'asse delle ascisse.

(i) Sia  $\mathbf{y}$  la riflessione del vettore  $\mathbf{x}$  rispetto alla retta  $x_1 = x_2$ . Far vedere che l'angolo che  $\mathbf{y}$  forma con l'asse delle ascisse è uguale a  $\pi/2 - \varphi$ .

(ii) Dimostrare che

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) &= \sin \varphi, \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) &= \cos \varphi. \end{aligned}$$

(2.B) Sia  $\mathbf{x}$  il vettore  $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ . Trovare altri tre punti sulla retta  $r$  che passa per  $\mathbf{0}$  e  $\mathbf{x}$ .

(2.C) Sia  $T$  il triangolo di vertici

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(i) Calcolare le coordinate dei punti medi  $M_1, M_2$  ed  $M_3$  dei lati di  $T$ .

(ii) Calcolare le equazioni delle tre rette  $l_1, l_2, l_3$  passanti per un vertice del triangolo e per il punto medio  $M_i$  ad esso opposto.

(iii) Calcolare i punti di intersezione fra le tre rette  $l_1, l_2$  e  $l_3$ .

(2.D) Siano  $l$  e  $m$  le rette in  $\mathbf{R}^2$  date dalle equazioni cartesiane

$$2x_1 - 3x_2 + 1 = 0, \quad 3x_1 + x_2 - 2 = 0.$$

- (i) Trovare equazioni parametriche per  $l$  ed  $m$ .
- (ii) Calcolare l'intersezione di  $l$  ed  $m$ .

(2.E) Siano  $l$  e  $m$  le rette in  $\mathbf{R}^2$  date dalle equazioni parametriche

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbf{R}.$$

- (i) Trovare equazioni cartesiane per  $l$  ed  $m$ .
  - (ii) Calcolare l'intersezione di  $l$  ed  $m$ .
- (2.F) Sia  $l$  la retta in  $\mathbf{R}^2$  di equazione  $x_1 = 3$ .
- (i) Trovare un vettore normale ad  $l$ .
  - (ii) Trovare un altro vettore normale ad  $l$ .
  - (iii) Calcolare un'equazione parametrica per  $l$ .
  - (iv) Calcolare un'altra equazione parametrica per  $l$ .

(2.G) Sia  $l$  la retta data dall'equazione  $x_1 - x_2 = 7$ . Sia  $m$  la retta di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

- (i) Calcolare il punto di intersezione di  $l$  ed  $m$ .
- (2.H) Sia  $l$  la retta di equazione  $2x_1 + 2x_2 + 3 = 0$ . Sia  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ .
- (i) Calcolare un'equazione cartesiana per la retta  $m_1$  che passa per  $\mathbf{p}$  ed è parallela ad  $l$ .
  - (ii) Calcolare un'equazione cartesiana per la retta  $m_2$  che passa per  $\mathbf{p}$  ed è ortogonale ad  $l$ .
  - (iii) Trovare il punto di intersezione di  $m_1$  ed  $m_2$ .

(2.I) Sia  $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$  e sia  $l$  la retta di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

- (i) Calcolare la proiezione ortogonale del punto  $\mathbf{q}$  sulla retta  $l$ .
  - (ii) Calcolare la distanza fra  $\mathbf{q}$  ed  $l$ .
- (2.J) Siano

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- (i) Calcolare equazioni cartesiane per le tre rette, passanti per due dei tre punti  $\mathbf{p}_1$ ,  $\mathbf{p}_2$  e  $\mathbf{p}_3$ .
  - (ii) Trovare vettori normali ad ognuna delle tre rette.
- (2.K) Sia  $C$  la circonferenza data da  $x_1^2 + x_2^2 = 8$  e siano  $l_1$ ,  $l_2$  e  $l_3$  le rette date da  $x_1 + x_2 = 4$ , da  $x_1 + x_2 = 3$  e da  $x_1 + x_2 = 5$ . Calcolare le intersezioni  $C \cap l_i$  per  $i = 1, 2, 3$ . Fare un disegno di  $C$  e delle tre rette.

(2.L) Sia  $C_1$  la circonferenza di centro  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  e raggio  $\sqrt{2}$  e sia  $C_2$  la circonferenza di equazione

$$x_1^2 + x_2^2 - 5x_1 + 4x_2 = 0.$$

Calcolare l'intersezione  $C_1 \cap C_2$ . Fare un disegno.

(2.M) Sia  $C_1$  la circonferenza di centro  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  e raggio  $\sqrt{2}$  e sia  $C_2$  la circonferenza di equazione

$$x_1^2 + x_2^2 + 3x_1 + 3x_2 = 20.$$

Calcolare l'intersezione  $C_1 \cap C_2$ . Fare un disegno.

(2.N) Sia  $C$  la circonferenza data da

$$x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 - 8x_2 + 7 = 0.$$

Calcolare le tangenti a  $C$  uscenti dai punti

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(2.O) Sia  $C$  la circonferenza di centro  $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$  e raggio 37 e sia  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 102 \\ -97 \end{pmatrix}$ .

- (i) Calcolare il punto  $\mathbf{q}_1 \in C$  più vicino a  $\mathbf{p}$ .
- (ii) Calcolare il punto  $\mathbf{q}_2 \in C$  più lontano da  $\mathbf{p}$ .
- (iii) Calcolare la distanza fra  $\mathbf{q}_1$  e  $\mathbf{q}_2$ .

(2.P) Dati due punti  $P$  e  $Q$  in  $\mathbf{R}^2$ , determinare l'insieme dei punti equidistanti da  $P$  e  $Q$ .

### 3. Trasformazioni di $\mathbf{R}^2$ .

In questo paragrafo studiamo alcune trasformazioni geometriche del piano  $\mathbf{R}^2$ . Per trasformazioni si intendono sempre delle applicazioni bigettive  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ . Le trasformazioni del piano si possono *comporre* tra loro: se  $f$  e  $g$  sono due applicazioni bigettive da  $\mathbf{R}^2$  in  $\mathbf{R}^2$ , allora la composizione  $f \circ g$ , definita da

$$(f \circ g)(\mathbf{x}) = f(g(\mathbf{x})),$$

è ancora un'applicazione bigettiva da  $\mathbf{R}^2$  in  $\mathbf{R}^2$ . Nota bene che  $f \circ g$  si legge "*f composto g*", a indicare che prima si applica  $g$  al vettore  $\mathbf{x}$  e poi si applica  $f$  al vettore  $g(\mathbf{x})$ . In generale,  $f \circ g$  è diversa dall'applicazione  $g \circ f$ .

La composizione fra applicazioni gode della *proprietà associativa*:

$$(f \circ (g \circ h))(\mathbf{x}) = f(g(h(\mathbf{x}))) = ((f \circ g) \circ h)(\mathbf{x}).$$

**Definizione.** Sia  $\mathbf{p}$  un vettore di  $\mathbf{R}^2$ . La *traslazione*  $T_{\mathbf{p}}$  di passo  $\mathbf{p}$  è l'applicazione  $T_{\mathbf{p}} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  data da

$$T_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{p}.$$

In coordinate,

$$T_{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + p_1 \\ x_2 + p_2 \end{pmatrix}.$$

Fig.23 La traslazione  $T_{\mathbf{p}}$ .

Le traslazioni godono delle seguenti proprietà:

**Proposizione 3.1.**

- (i) Siano  $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{R}^2$ . Allora  $T_{\mathbf{p}} \circ T_{\mathbf{q}} = T_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} = T_{\mathbf{q}+\mathbf{p}} = T_{\mathbf{q}} \circ T_{\mathbf{p}}$ . In particolare, la composizione di due traslazioni è ancora una traslazione.
- (ii) La traslazione  $T_{\mathbf{0}}$  è l'applicazione identica.
- (iii) La traslazione  $T_{-\mathbf{p}}$  è l'inversa di  $T_{\mathbf{p}}$ .

**Dimostrazione.** (i) Per ogni  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ , vale

$$T_{\mathbf{p}} \circ T_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}) = (T_{\mathbf{p}}(T_{\mathbf{q}}(\mathbf{x}))) = T_{\mathbf{p}}(\mathbf{x} + \mathbf{q}) = \mathbf{x} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = T_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}(\mathbf{x}).$$

D'altra parte, per la commutatività della somma fra vettori, vale anche

$$\mathbf{x} + \mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{x} + \mathbf{q} + \mathbf{p} = T_{\mathbf{q}+\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = T_{\mathbf{q}} \circ T_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}).$$

(ii) Per ogni  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ , si ha che

$$T_{\mathbf{0}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x},$$

ossia  $T_{\mathbf{0}}$  è proprio l'applicazione identità di  $\mathbf{R}^2$ .

(iii) Dal punto (i) segue che

$$T_{\mathbf{p}} \circ T_{-\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = T_{-\mathbf{p}} \circ T_{\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = T_{\mathbf{0}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x},$$

cioè  $T_{\mathbf{p}}$  e  $T_{-\mathbf{p}}$  sono una l'inversa dell'altra.

Un'altra famiglia di trasformazioni di  $\mathbf{R}^2$  sono le *dilatazioni*.

**Definizione.** Siano  $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ ,  $\lambda, \mu > 0$ . La dilatazione  $D_{\lambda, \mu}$  di  $\mathbf{R}^2$  è l'applicazione  $D_{\lambda, \mu} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  definita da

$$D_{\lambda, \mu} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \mu x_2 \end{pmatrix}.$$

In notazione matriciale,

$$D_{\lambda, \mu} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Fig.24 La dilatazione  $D_{2,3}$ .

Se  $\lambda = \mu > 0$ , la dilatazione  $D_{\lambda, \mu}$  è semplicemente un "ingrandimento" di fattore  $\lambda = \mu$ . Se  $\lambda$  e  $\mu$  sono numeri positivi distinti,  $D_{\lambda, \mu}$  è un ingrandimento di fattore  $\lambda$  nella direzione dell'asse delle ascisse e di fattore  $\mu$  nella direzione dell'asse delle ordinate.

Introduciamo adesso la famiglia delle *rotazioni*.

**Definizione.** Sia  $\varphi \in \mathbf{R}$ . Indichiamo con  $R_\varphi: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  l'applicazione che ad un vettore  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$  associa il vettore ottenuto da  $\mathbf{x}$  dopo la rotazione di un angolo  $\varphi$  intorno all'origine. Se  $\varphi > 0$ , la rotazione va intesa in senso "antiorario". Se  $\varphi < 0$ , la rotazione va intesa in senso opposto, cioè in senso "orario".

Fig.25 La rotazione  $R_\varphi$ .

**Teorema 3.2.** Sia  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$  e sia  $\varphi \in \mathbf{R}$ . Le coordinate del punto  $\mathbf{y} = R_\varphi(\mathbf{x})$  sono date da

$$\begin{aligned} y_1 &= \cos \varphi x_1 - \operatorname{sen} \varphi x_2, \\ y_2 &= \operatorname{sen} \varphi x_1 + \cos \varphi x_2. \end{aligned}$$

In notazione matriciale,

$$R_\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\operatorname{sen} \varphi \\ \operatorname{sen} \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

**Dimostrazione.** Sia  $\alpha$  l'angolo fra il vettore  $\mathbf{x}$  e l'asse delle ascisse. Allora si ha

$$\begin{aligned} x_1 &= \|\mathbf{x}\| \cos \alpha, \\ x_2 &= \|\mathbf{x}\| \operatorname{sen} \alpha. \end{aligned}$$

Il vettore  $\mathbf{y} = R_\varphi(\mathbf{x})$  forma un angolo  $\varphi + \alpha$  con l'asse delle ascisse e quindi

$$\begin{aligned} y_1 &= \|\mathbf{x}\| \cos(\varphi + \alpha) = \|\mathbf{x}\| \cos \varphi \cos \alpha - \|\mathbf{x}\| \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \alpha, \\ y_2 &= \|\mathbf{x}\| \operatorname{sen}(\varphi + \alpha) = \|\mathbf{x}\| \cos \varphi \operatorname{sen} \alpha + \|\mathbf{x}\| \operatorname{sen} \varphi \cos \alpha. \end{aligned}$$

La sostituzione  $x_1 = \|\mathbf{x}\| \cos \alpha$  e  $x_2 = \|\mathbf{x}\| \operatorname{sen} \alpha$  conclude la dimostrazione.

**Esempio.** Per esempio, la rotazione  $R_{\pi/4}$  di centro  $\mathbf{0}$  e di angolo  $\varphi = \pi/4$  è l'applicazione

$$R_{\pi/4} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2}x_1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}x_2 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}x_1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}x_2 \end{pmatrix}.$$

Le rotazioni godono delle seguenti proprietà.

**Proposizione 3.3.**

(i) La composizione di due rotazioni  $R_\varphi$  e  $R_\psi$  intorno all'origine è una rotazione di angolo  $\varphi + \psi$ :

$$R_\varphi \circ R_\psi = R_{\varphi+\psi} = R_\psi \circ R_\varphi.$$

(ii) La rotazione di un angolo  $\varphi = 0$  è l'applicazione identica, ossia  $R_0(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ , per ogni  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$ .

(iii) La rotazione inversa di  $R_\varphi$  è  $R_{-\varphi}$ .

**Dimostrazione.** Tutte queste proprietà sono geometricamente evidenti, ma si possono anche ottenere dalle formule del Teorema 3.2.

**Osservazione.** Come ottenere le formule di una rotazione  $R_{\varphi, \mathbf{p}}$  di angolo  $\varphi$  intorno ad un punto  $\mathbf{p}$  diverso dall'origine? Un modo di procedere è il seguente: prima si fa una traslazione  $T_{-\mathbf{p}}$  di passo  $-\mathbf{p}$ , che porti il punto  $\mathbf{p}$  in  $\mathbf{0}$ ; poi si fa una rotazione  $R_\varphi$  intorno a  $\mathbf{0}$  e poi si fa una traslazione  $T_{\mathbf{p}}$  che riporti  $\mathbf{0}$  in  $\mathbf{p}$ :

$$R_{\varphi, \mathbf{p}} = T_{\mathbf{p}} \circ R_\varphi \circ T_{-\mathbf{p}}.$$

**Esempio 3.4.** Calcoliamo, ad esempio, le formule della rotazione  $R_{\varphi, \mathbf{p}}$  di un angolo  $\varphi$  attorno al punto  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ . Abbiamo

$$\begin{aligned} R_{\varphi, \mathbf{p}}(\mathbf{x}) &= T_{\mathbf{p}} \circ R_\varphi \circ T_{-\mathbf{p}}(\mathbf{x}) \\ &= T_{\mathbf{p}} \circ R_\varphi \begin{pmatrix} x_1 - 5 \\ x_2 - 4 \end{pmatrix} \\ &= T_{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} \cos \varphi (x_1 - 5) - \sin \varphi (x_2 - 4) \\ \sin \varphi (x_1 - 5) + \cos \varphi (x_2 - 4) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \varphi (x_1 - 5) - \sin \varphi (x_2 - 4) + 5 \\ \sin \varphi (x_1 - 5) + \cos \varphi (x_2 - 4) + 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Introduciamo infine le *riflessioni*.

**Definizione.** Sia  $\varphi \in \mathbf{R}$ . Indichiamo con  $S_\varphi: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$  l'applicazione che ad un vettore  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$  associa il vettore ottenuto da  $\mathbf{x}$  dopo la riflessione rispetto alla retta che passa per  $\mathbf{0}$  e forma un angolo  $\varphi$  con l'asse delle ascisse.

Fig.26 La riflessione  $S_\varphi$ .

**Teorema 3.5.** Sia  $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^2$  e sia  $\varphi \in \mathbf{R}$ . Le coordinate del punto  $\mathbf{y} = S_\varphi(\mathbf{x})$  sono date da

$$\begin{aligned} y_1 &= \cos(2\varphi)x_1 + \operatorname{sen}(2\varphi)x_2, \\ y_2 &= \operatorname{sen}(2\varphi)x_1 - \cos(2\varphi)x_2. \end{aligned}$$

In notazione matriciale,

$$S_\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & \operatorname{sen}(2\varphi) \\ \operatorname{sen}(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

**Dimostrazione.** Sia  $\alpha$  l'angolo fra il vettore  $\mathbf{x}$  e l'asse delle ascisse. Allora si ha

$$\begin{aligned} x_1 &= \|\mathbf{x}\| \cos \alpha, \\ x_2 &= \|\mathbf{x}\| \operatorname{sen} \alpha. \end{aligned}$$

Si vede dalla Fig.28 che il vettore  $\mathbf{y} = S_\varphi(\mathbf{x})$  forma un angolo  $2\varphi - \alpha$  con l'asse delle ascisse e quindi

$$\begin{aligned} y_1 &= \|\mathbf{x}\| \cos(2\varphi - \alpha) = \|\mathbf{x}\| \cos(2\varphi) \cos \alpha + \|\mathbf{x}\| \operatorname{sen}(2\varphi) \operatorname{sen} \alpha, \\ y_2 &= \|\mathbf{x}\| \operatorname{sen}(2\varphi - \alpha) = -\|\mathbf{x}\| \cos(2\varphi) \operatorname{sen} \alpha + \|\mathbf{x}\| \operatorname{sen}(2\varphi) \cos \alpha. \end{aligned}$$

La sostituzione  $x_1 = \|\mathbf{x}\| \cos \alpha$  e  $x_2 = \|\mathbf{x}\| \operatorname{sen} \alpha$  conclude la dimostrazione.

**Esempio.** Per esempio, la retta  $l$  data da  $x_1 = x_2$  forma un angolo di  $\pi/4$  con l'asse delle ascisse. La riflessione rispetto ad  $l$  è l'applicazione  $S_{\pi/4}$  data dalle formule

$$S_{\pi/4} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

**Proposizione 3.6.**

- (i) La composizione  $S_\varphi \circ S_\varphi$  è l'applicazione identica.
- (ii) La composizione  $S_\varphi \circ S_\psi$  di due riflessioni rispetto a rette distinte passanti per  $\mathbf{0}$  (con  $\varphi \neq \psi$ ) è una rotazione di angolo  $2(\varphi - \psi)$ .

**Dimostrazione.** Calcoliamo

$$\begin{aligned} (S_\varphi \circ S_\psi)(\mathbf{x}) &= \left( \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) & \operatorname{sen}(2\varphi) \\ \operatorname{sen}(2\varphi) & -\cos(2\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(2\psi) & \operatorname{sen}(2\psi) \\ \operatorname{sen}(2\psi) & -\cos(2\psi) \end{pmatrix} \right) (\mathbf{x}) \\ &= \begin{pmatrix} \cos(2\varphi) \cos(2\psi) + \operatorname{sen}(2\varphi) \operatorname{sen}(2\psi) & \cos(2\varphi) \operatorname{sen}(2\psi) - \operatorname{sen}(2\varphi) \cos(2\psi) \\ \operatorname{sen}(2\varphi) \cos(2\psi) - \cos(2\varphi) \operatorname{sen}(2\psi) & \operatorname{sen}(2\varphi) \operatorname{sen}(2\psi) + \cos(2\varphi) \cos(2\psi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(2(\varphi - \psi)) & -\operatorname{sen}(2(\varphi - \psi)) \\ \operatorname{sen}(2(\varphi - \psi)) & \cos(2(\varphi - \psi)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= R_{2(\varphi - \psi)}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

In particolare, se  $\varphi = \psi + k\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$  otteniamo l'applicazione identità.

**Osservazione.** Dalle formule del teorema precedente si vede anche che, in generale,

$$S_\varphi \circ S_\psi \neq S_\psi \circ S_\varphi.$$

**Osservazione.** Se  $\varphi = 0$ , l'applicazione  $S_0$  è una riflessione rispetto all'asse delle ascisse; se  $\varphi = \pi/2$ , l'applicazione  $S_{\pi/2}$  è una riflessione rispetto all'asse delle ordinate.

Fig.27 La riflessione rispetto all'asse delle ascisse  $S_0$ .

La composizione delle riflessioni  $S_0$  ed  $S_{\pi/2}$  è una rotazione di angolo  $\pi$ , ossia la riflessione rispetto all'origine  $\mathbf{0}$ .

Fig.28 La riflessione rispetto all'origine  $R_\pi = S_0 \circ S_{\pi/2}$ .

**Osservazione.** Come calcolare le formule della riflessione  $S$  rispetto ad una retta  $l$  che non passa per l'origine? Se la retta  $l$  non passa per l'origine, non possiamo usare direttamente le formule del Teorema 3.5, ma possiamo procedere nel seguente modo. Fissiamo un punto arbitrario  $\mathbf{p}$  sulla retta  $l$  e applichiamo la traslazione  $T_{-\mathbf{p}}$ . La trasformata della retta  $l$ , tramite  $T_{-\mathbf{p}}$ , è la retta  $l'$ , parallela ad  $l$  e passante per  $\mathbf{0}$ ; applichiamo adesso la riflessione  $S_\varphi$  rispetto ad  $l'$ , ove  $\varphi$  è l'angolo formato da  $l'$  con l'asse delle ascisse. Appliciamo infine la traslazione inversa  $T_{\mathbf{p}}$ , che “riporta la retta  $l$  al suo posto”. In totale, la riflessione rispetto ad  $l$  è data dalla composizione

$$S = T_{\mathbf{p}} \circ S_\varphi \circ T_{-\mathbf{p}}$$

e non dipende dalla scelta di  $\mathbf{p} \in l$ .

**Esempio 3.7.** Calcoliamo ad esempio la riflessione rispetto alla retta  $l$  di equazione  $x_1 + 1 = 0$ . Il punto  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  appartiene ad  $l$  e quindi la traslazione  $T_{-\mathbf{p}}$  di passo  $-\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  porta  $l$  nella retta  $l'$ , ad essa parallela e passante per l'origine.  $l'$  è data dall'equazione  $x_1 = 0$  e forma un angolo uguale a  $\pi/2$  con l'asse delle ascisse. La trasformazione cercata è data dunque dalla composizione

$$S = T_{-\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \circ S_{\pi/2} \circ T_{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}.$$

In coordinate  $S$  risulta

$$\begin{aligned}
 S(\mathbf{x}) &= T_{-\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \circ S_{\pi/2} \circ T_{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}(\mathbf{x}) \\
 &= T_{-\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \circ S_{\pi/2} \begin{pmatrix} x_1 + 1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\
 &= T_{-\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \left( \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + 1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) \\
 &= T_{-\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} -x_1 - 1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 - 2 \\ x_2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Concludiamo questo paragrafo introducendo l'orientazione di una coppia di vettori in  $\mathbf{R}^2$ .

**Definizione.** L'orientazione  $\text{Or}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$  di una coppia di vettori  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{R}^2$  è il segno del determinante

$$\det \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{pmatrix} = v_1 w_2 - v_2 w_1.$$

In altre parole

$$\text{Or}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \begin{cases} +1 & \text{se } v_1 w_2 - v_2 w_1 > 0; \\ 0 & \text{se } v_1 w_2 - v_2 w_1 = 0; \\ -1 & \text{se } v_1 w_2 - v_2 w_1 < 0. \end{cases}$$

Si dice che una coppia di vettori  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  è orientata *positivamente* se  $\text{Or}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) > 0$ . Geometricamente, ciò accade se, ruotando il vettore  $\mathbf{v}$  in senso antiorario fino a sovrapporlo alla retta passante per  $\mathbf{0}$  e  $\mathbf{w}$ , allora  $\mathbf{v}$  ha lo stesso verso di  $\mathbf{w}$  (e non quello opposto).

Fig.29 Orientazione.

L'orientazione  $\text{Or}(\mathbf{v}, \mathbf{w})$  *cambia* se cambia l'ordine dei vettori  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$ . Si ha infatti che

$$\text{Or}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = -\text{Or}(\mathbf{w}, \mathbf{v}).$$

Siano  $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  ed  $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Allora si ha che

$$\text{Or}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = +1, \quad \text{Or}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = -1.$$

Una qualunque rotazione  $R_\varphi$  conserva l'orientazione di ogni coppia di vettori. Si dice anche che le rotazioni conservano l'orientazione del piano. Una riflessione, invece, cambia l'orientazione di ogni coppia di vettori. Una dilatazione  $D_{\lambda,\mu}$ ,  $\lambda, \mu > 0$  conserva sempre l'orientazione:

$$\begin{aligned}\text{Or}(D_{\lambda,\mu}(\mathbf{v}), D_{\lambda,\mu}(\mathbf{w})) &= \text{Or}\left(\begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \mu v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda w_1 \\ \mu w_2 \end{pmatrix}\right), \\ &= \lambda v_1 \mu w_2 - \lambda w_1 \mu v_2, \\ &= \lambda \mu \text{Or}(\mathbf{v}, \mathbf{w}).\end{aligned}$$

In generale, un'applicazione lineare  $f$  di  $\mathbf{R}^2$  conserva l'orientazione se e soltanto se  $\det(f) > 0$ .

### Esercizi.

(3.A) Siano  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  e  $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ .

- (i) Trovare le formule per la traslazione  $T_{\mathbf{p}}$ .
- (ii) Calcolare  $T_{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $T_{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ .
- (iii) Calcolare  $T_{3\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $T_{3\mathbf{p}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ .
- (iv) Calcolare  $(T_{\mathbf{q}} \circ T_{3\mathbf{p}}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $(T_{3\mathbf{p}} \circ T_{-\mathbf{q}}) \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ .

(3.B) Sia  $Q$  il trapezio in  $\mathbf{R}^2$  di vertici

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- (i) Disegnare l'immagine di  $Q$  dopo la traslazione  $T_{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}}$ .
- (ii) Disegnare l'immagine di  $Q$  dopo la dilatazione  $D_{2,2}$  data dalla matrice  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ .
- (iii) Disegnare l'immagine di  $Q$  dopo la riflessione  $S_0$  data dalla matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .
- (iv) Disegnare l'immagine di  $Q$  dopo la rotazione  $R_\pi$  data dalla matrice  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

(3.C) Sia  $D_{2,5}$  la dilatazione data dalla matrice  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ .

- (i) Trovare una dilatazione  $D_{\lambda,\mu}$  tale che  $D_{\lambda,\mu} \circ D_{2,5}$  sia l'applicazione identica.
- (ii) Trovare una dilatazione  $D_{\lambda,\mu}$  tale che  $D_{2,5} \circ D_{\lambda,\mu}$  sia l'applicazione identica.

(3.D) Per quali dilatazioni  $D_{\lambda,\mu}$  abbiamo che  $D_{\lambda,\mu} \circ D_{\lambda,\mu}$  è l'applicazione identica?

(3.E) Sia  $Q$  il quadrato in  $\mathbf{R}^2$  di vertici

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- (i) Disegnare l'immagine di  $Q$  dopo la rotazione  $R_{\pi/2}$ .
- (ii) Disegnare l'immagine di  $Q$  dopo la rotazione  $R_\pi$ .
- (iii) Disegnare l'immagine di  $Q$  dopo la rotazione  $R_{3\pi/2}$ .

(3.F) Sia  $Q$  il quadrato in  $\mathbf{R}^2$  di vertici

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- (i) Disegnare l'immagine di  $Q$  dopo la rotazione  $R_{\pi/2}$ .
- (ii) Per quali angoli  $\varphi$  la rotazione  $R_\varphi$  manda il quadrato in se stesso?
- (iii) Disegnare l'immagine di  $Q$  dopo la rotazione  $R_{\pi/4}$ .

(3.G) Siano  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6$  i punti di  $\mathbf{R}^2$  di coordinate

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

- (i) Per quali angoli  $\varphi$  la rotazione  $R_\varphi$  manda l'esagono di vertici  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6$  in se stesso?

(3.H) Sia  $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

- (i) Trovare le formule per la rotazione  $R$  di centro  $\mathbf{p}$  ed angolo  $\pi/2$ .
- (ii) Trovare le formule per la rotazione  $R'$  di centro  $\mathbf{p}$  ed angolo  $-\pi/4$ .
- (iii) Sia  $l$  la retta di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Calcolare un'equazione parametrica della retta che si ottiene applicando  $R$  ad  $l$ .

- (iv) Sia  $m$  la retta di equazione cartesiana

$$x_1 + x_2 = 7.$$

Calcolare un'equazione parametrica della retta che si ottiene applicando  $R'$  ad  $l$ .

(3.I) Sia  $l$  la retta di equazione  $x_1 + x_2 = 0$ .

- (i) Calcolare le formule della riflessione rispetto ad  $l$ .
- (ii) Calcolare le immagini dei punti

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (iii) Calcolare l'immagine della retta di equazione parametrica

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

(3.J) Sia  $Q$  il quadrato dell'Eserc.3.E. Calcolare l'immagine di  $Q$  dopo la riflessione rispetto

- (i) all'asse delle ascisse.
- (ii) all'asse delle ordinate.
- (iii) alla retta di equazione  $x_1 = x_2$ .

(3.K) Sia  $Q$  il quadrato dell'Eserc.3.F. Calcolare l'immagine di  $Q$  dopo la riflessione rispetto

- (i) all'asse delle ascisse.
- (ii) all'asse delle ordinate.
- (iii) alla retta di equazione  $x_1 = x_2$ .
- (iv) Trovare tutte le riflessioni  $S_\varphi$  che mandano  $Q$  in se stesso.

- (3.L) Siano  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6$  i punti dell'Eserc.3.G. Calcolare l'immagine dell'esagono di vertici  $Q_i$  dopo la riflessione rispetto
- all'asse delle ascisse.
  - all'asse delle ordinate.
  - la retta di equazione  $\sqrt{3}x_1 + x_2 = 0$ .
  - Trovare tutte le riflessioni  $S_\varphi$  che mandano l'esagono in se stesso.
- (3.M) Sia  $S$  la riflessione rispetto alla retta  $l$  di equazione cartesiana  $3x_1 + 4x_2 = 0$ .
- Calcolare la tangente dell'angolo  $\varphi$  formato da  $l$  con l'asse delle ascisse.
  - Calcolare le formule per  $S$ .
- (3.N) Sia  $S$  la riflessione rispetto alla retta  $l$  di equazione cartesiana  $3x_1 + 4x_2 = 0$ .
- Calcolare le formule della riflessione  $S_0$  rispetto all'asse delle ascisse.
  - Far vedere che

$$S = R_{-\varphi} \circ S_0 \circ R_\varphi.$$

(Suggerimento: calcolare le formule per  $R_\varphi$  e per  $S$ ).

- (3.O) Sia  $l$  la retta di equazione parametrica

$$\mathbf{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}$$

e sia  $m$  la retta di equazione  $x_1 = 0$ .

- Trovare le formule della riflessione  $S$  rispetto ad  $l$ .
- Calcolare le formule della riflessione  $S'$  rispetto ad  $m$ .
- Calcolare le formule della trasformazione composta

$$S \circ S'.$$

- Calcolare le formule per la trasformazione composta

$$S' \circ S.$$

(v) Geometricamente, che cosa fanno  $S \circ S'$  e  $S' \circ S$ ?

- (3.P) Sia  $l$  la retta di equazione  $x_1 = 1$  e sia  $m$  la retta di equazione  $x_2 = 2$ .
- Calcolare le formule della riflessione  $S$  rispetto ad  $l$ .
  - Calcolare le formule della riflessione  $S'$  rispetto ad  $m$ .
  - Calcolare le formule della trasformazione composta

$$S \circ S'.$$

- Calcolare le formule della trasformazione composta

$$S' \circ S.$$

(v) Geometricamente, che cosa fanno  $S \circ S'$  e  $S' \circ S$ ?

- (3.Q) Siano  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  e  $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

- Calcolare l'orientazione di  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$ .
- Calcolare l'orientazione di  $\mathbf{w}$  e  $\mathbf{v}$ .
- Sia  $S_0$  la riflessione rispetto all'asse delle ascisse. Calcolare  $\text{Or}(S_0(\mathbf{v}), S_0(\mathbf{w}))$ .
- Sia  $S_\varphi$  la riflessione rispetto alla retta passante per  $\mathbf{0}$  e formante un angolo  $\varphi$  con l'asse delle ascisse. Calcolare  $\text{Or}(S_\varphi(\mathbf{v}), S_\varphi(\mathbf{w}))$ .

- (3.R) Siano  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  e  $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

- Sia  $R_{\pi/2}$  la rotazione di centro  $\mathbf{0}$  e angolo  $\pi/2$ . Calcolare  $\text{Or}(R_{\pi/2}(\mathbf{v}), R_{\pi/2}(\mathbf{w}))$ .
- Sia  $R_\varphi$  la rotazione di centro  $\mathbf{0}$  e angolo  $\varphi$ . Calcolare  $\text{Or}(R_\varphi(\mathbf{v}), R_\varphi(\mathbf{w}))$ .

- (3.S) Siano  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  e  $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Siano  $S^{(1)}, S^{(2)}, \dots, S^{(t)}$  le riflessioni rispetto a delle rette passanti per  $\mathbf{0}$ . Sia  $S = S^{(1)} \circ S^{(2)} \circ \dots \circ S^{(t)}$ . Calcolare l'orientazione  $\text{Or}(S(\mathbf{v}), S(\mathbf{w}))$ .