Prima dimostriamo che e è irrazionale e dopo che è persino trascendente. Sia n un intero positivo. Abbiamo che

$$0 < e - \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} = \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots\right) < \frac{1}{n!}.$$

Se e fosse razionale, avrebbe un denominatore $n \geq 1$. Allora $n!(e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!})$ sarebbe un intero fra 0 e 1. Contraddizione.

Per dimostrare la trascendenza di e, sfrutteremo della *identità di Hermite*. Per un polinomio $f(X)$ di grado m, sia $F(X) = \sum_{i\geq 0} f^{(i)}(X)$ la somma delle derivate $f^{(i)}(X)$. Integrando per parti $m+1$ volte si ottiene

$$\int_0^x f(t)e^{-t}dt = F(0) - e^{-x}F(x).$$

Supponiamo che e sia algebrico con polinomio minimo $a_dX^d + \dots + a_0 \in \mathbf{Z}[X]$ di grado d. Sia $p > d$ un numero primo che non divide a_0. Sia

$$f(X) = \frac{X^{p-1}(X-1)^p \cdots (X-d)^p}{(p-1)!}.$$

Allora la formula di Hermite implica che per $x \in [0, d]$ vale la stima

$$|e^x F(0) - F(x)| = e^x \left|\int_0^x f(t)e^{-t}dt\right| \leq de^d \sup_{t\in[0,d]} |f(t)| \leq \frac{de^d d^{(d+1)p}}{(p-1)!}.$$

Per la formula di Stirling, questa quantità tende a zero se $p \to \infty$. Ne segue che per $k = 1, \dots, d$ il numero razionale $F(k)/F(0)$ è una buona approssimazione di e^k se p è molto grande. Similmente, per p sufficientemente grande, l'espressione

$$\sum_{k=0}^{d} a_k F(k) = \sum_{k=0}^{d} a_k \left(F(k) - e^k F(0)\right)$$

ha valora assoluto < 1. D'altra parte, il Lemma qua sotto implica che, per $k = 0, 1, \dots, d$, i numeri $F(k)$ sono interi, tutti divisibili per p tranne $F(0)$. Ne segue che $\sum_{k=0}^{d} a_k F(k)$ è un intero non nullo. Contraddizione.

Lemma.
(a) *$F(0)$ è un intero non divisibile per p.*
(b) *Per $1 \leq k \leq d$ il valore $F(k)$ è un intero divisibile per p.*

Dimostrazione. (a) Scriviamo $f(X) = g(X)h(X)$ dove

$$g(X) = \frac{X^{p-1}}{(p-1)!} \qquad \text{e} \qquad h(X) = (X-1)^p \cdots (X-d)^p.$$

Per la formula di Leibniz abbiamo che $f^{(i)}(x) = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} g^{(j)}(x) h^{(i-j)}(x)$, per $i \geq 0$. Siccome

$$g^{(j)}(0) = \begin{cases} 1, & \text{se } j = p-1, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

abbiamo che

$$f^{(i)}(0) = \begin{cases} 0, & \text{per } i < p-1, \\ \binom{i}{p-1} h^{(i-p+1)}(0), & \text{per } i \geq p-1. \end{cases}$$

Poiché h è una p-esima potenza in $\mathbf{Z}[X]$, per ogni $j \geq 1$ il valore $h^{(j)}(0)$ è un intero congruo a 0 modulo p. Ne segue che $F(0)$ è un intero congruo a $f^{(p-1)}(0) \equiv h(0) = -d! \not\equiv 0 \bmod p$, come richiesto.

(b) Scriviamo $f(X) = g(X)h(X)$ dove

$$g(X) = \frac{(X-k)^p}{(p-1)!} \qquad \text{e} \qquad h(X) = X^{p-1} \frac{(X-1)^p \cdots (X-d)^p}{(X-k)^p}.$$

Poiché

$$g^{(i)}(k) = \begin{cases} p, & \text{per } i = p, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

abbiamo che

$$f^{(i)}(k) = \begin{cases} 0 & \text{per } i < p, \\ p\binom{i}{p} h^{(i-p)}(k), & \text{per } i \geq p. \end{cases}$$

Per ogni $j \geq 0$, il valore $h^{(j)}(k)$ è in $\mathbf{Z}$. Quindi $F(k)$ è un intero divisibile per p, come richiesto.