

1. Siano A, B, C, D quattro punti distinti su una retta l di $\mathbf{P}^2$. Far vedere che i birapporti $(ABCD)$, $(BADC)$, $(DCBA)$ e $(CDAB)$ sono tutti uguali.
2. Siano A, B, C, D quattro punti di $\mathbf{P}^2$ in posizione generale. Sia l la retta passante per A e B , sia m la retta passante per C e D e sia n una retta passante per $l \cap m$ che è diversa da l e m . Disegnare la configurazione di questi cinque punti e tre rette. Disegnare la configurazione duale.
3. Sia l una retta in $\mathbf{P}^2$. Far vedere che nessuna involuzione $\varphi : l \longrightarrow l$ ha esattamente 1 punto fisso. (Una proiettività φ è un'involuzione quando $\varphi \cdot \varphi$ è l'identità.)
4. Sia l una retta proiettiva e sia $f : l \longrightarrow l$ un'involuzione che ha punti fissi.
 - (a) Far vedere che f ha due punti fissi.
 - (b) Costruire una involuzione con due punti fissi.
 - (c) Siano A e B i punti fissati da f . Dimostrare che per ogni punto $C \in l$ il birapporto $(ABCF(C))$ è uguale a -1 .
5. Sia l una retta proiettiva e siano P, Q, R tre punti distinti di l . Costruire una proiettività $f : l \longrightarrow l$ per cui $f(Q) = R$ e che ammette P come unico punto fisso. Far vedere che c'è una proiettività sola con queste proprietà.
6. Siano P e Q due punti distinti su una retta l .
 - (a) Costruire due proiettività diverse di l che fissano P e Q .
 - (b) Dimostrare che ogni due proiettività φ_1, φ_2 di l che fissano P e Q , soddisfano $\varphi_1\varphi_2 = \varphi_2\varphi_1$.
7. Per ogni $n = 1, 2, 3, \dots$ esibire una proiettività $f : \mathbf{P}^1 \longrightarrow \mathbf{P}^1$ tale che f^n è l'identità mentre f^k non è l'identità per nessun numero naturale $k \leq n - 1$. (Dove f^k è la proiettività che consiste nel applicare f esattamente k volte)
8. Dire se le seguenti coniche in $\mathbf{P}^2$ sono degeneri o meno. (Una conica C si dice *degenere* se i punti di C formano una retta, due rette o l'insieme vuoto.)
 - (a) $x_0^2 - 2x_1^2 - 3x_2^2 = 0$;
 - (b) $x_0^2 + 2x_1^2 - 3x_2^2 = 0$;
 - (c) $x_0^2 + 2x_1^2 + 3x_2^2 = 0$;
 - (d) $x_0^2 + x_1x_2 = 0$;
 - (e) $x_0x_1 + x_1x_2 + x_2x_0 = 0$;
 - (f) $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + 2x_0x_1 - 2x_0x_2 - 2x_1x_2 = 0$;
 - (g) $x_0x_1 + x_0x_2 + x_1x_2 + x_1^2 = 0$.
9. Sia C la conica di equazione $x_1^2 - x_0x_2 = 0$.
 - (a) Calcolare i punti A, B dati dall'intersezione di C con la retta di equazione $x_0 - x_1 = 0$.
 - (b) Sia $P = (1 : 2 : 0)$. Dire se P sta sulla conica o meno. Calcolare un'equazione della retta l che passa per A e P . Calcolare un'equazione della retta m che passa per B e P .
 - (c) Calcolare i punti di intersezione $l \cap C$ e $m \cap C$.
10. Sia C la conica data da $x_0x_1 + x_1x_2 - x_2x_0 = 0$. Determinare tre carte affini (= schermi per visualizzare una parte di $\mathbf{P}^2$) nelle quali i punti finiti di C formino rispettivamente una parabola, un'ellisse ed un'iperbole.