1. Sia $f : \mathbf{P}^1 \longrightarrow \mathbf{P}^1$ la proiettività data dalla matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Calcolare le coordinate di $f(P)$ dove $P = (1{:}\,1)$.
   (b) Calcolare le coordinate di $f(0{:}\,1)$ e di $f(1{:}\,0)$.
   (c) Determinare la formula per l'applicazione inversa f^{-1} e calcolare le coordinate di $f^{-1}(P)$. Calcolare $f^{-1}(0{:}\,1)$.
2. Sia l la retta in $\mathbf{P}^2$ di equazione $x_0 + x_1 - x_2 = 0$ e sia m la retta di equazione $x_2 - 2x_2 = 0$. Sia S il punto $(1{:}\,1{:}\,0)$ a sia P il punto $(1{:}\,0{:}\,1)$.
   (a) Far vedere che S non appartiene né a l, né a m. Far vedere che P appartiene a l ma non a m.
   (b) Sia $\pi_S : l \longrightarrow m$ la prospettività di centro S. Calcolare $\pi_S(P)$.
   (c) Sia Q il punto di intersezione $l \cap m$. Calcolare $\pi_S(Q)$.
3. Siano $P = (0{:}\,1)$, $Q = (1{:}\,0)$ e $R = (1{:}\,1)$ e sia $f : \mathbf{P}^1 \longrightarrow \mathbf{P}^1$ la proiettività determinata da $f(P) = (1{:}\,1)$, $f(Q) = (1{:}\,0)$ e $f(R) = (-1{:}\,1)$. Determinare una matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tale che $f(x_0{:}\,x_1) = (ax_0 + bx_1{:}\,cx_0 + dx_1)$ per ogni $(x_0{:}\,x_1) \in \mathbf{P}^1$.
4. (a) Sia $f : \mathbf{P}^1 \longrightarrow \mathbf{P}^1$ la proiettività data da $f(x_0{:}\,x_1) = (5x_0 + 2x_1{:}\,2x_0 + 2x_1)$. Calcolare i punti fissi di f.
   (b) Stessa domanda per $g : \mathbf{P}^1 \longrightarrow \mathbf{P}^1$ data da $g(x_0{:}\,x_1) = (5x_0 + 2x_1{:}\,-2x_0 + x_1)$.
   (c) Stessa domanda per $h : \mathbf{P}^1 \longrightarrow \mathbf{P}^1$ data da $h(x_0{:}\,x_1) = (5x_0 + 2x_1{:}\,-2x_0 + 2x_1)$.
5. (a) Esibire una costruzione geometrica di una proiettività f da una retta proiettiva l in se stessa, che fissa due punti $A, B \in l$ dati, ma non è l'identità.
   (b) Dimostrare che ci sono infinite proiettività che hanno questa proprietà.
   (c) Dimostrare che esiste un unica *involuzione* f con questa proprietà. (Un'applicazione f si dice *involuzione* quando $f^2 = \mathrm{id}$).
6. Sia l una retta proiettiva e siano $A, B, C, D \in l$ quattro punti. Sia $f : l \longrightarrow l$ una proiettività per cui $f(A) = B$, $f(B) = C$ e $f(C) = D$. Dati i punti A, B, C, D, costruire il punto $f(D)$.
7. Sia l una retta proiettiva e siano P, Q due punti di l. Sia $g : l \longrightarrow l$ una proiettività che scambia P e Q: abbiamo che $f(P) = Q$ e $f(Q) = P$. Dimostrare che f è una involuzione, cioè che $f^2 = \mathrm{id}$.
8. Sia l una retta e sia $\varphi : l \longrightarrow l$ una proiettività. Siano dati: un punto fisso Pdi φ e punti A, A', B e B' tali che $\varphi(A) = A'$ e $\varphi(B) = B'$. Costruire Q, il secondo punto fisso di φ.
9. Sia M una matrice 2×2 invertibile e sia $\varphi : \mathbf{P}^1 \longrightarrow \mathbf{P}^1$ la mappa proiettiva indotta da M. Supponiamo che $\varphi^2 = \mathrm{id}$ mentre $\varphi \neq \mathrm{id}$. Far vedere che la traccia di M è zero.
10. Siano l e m due rette disegnate su un foglio di carta. Supponiamo che il punto di intersezione $P = l \cap m$ si trova fuori dal foglio. Usando il Teorema di Desargues, costruire la retta che passa per P e per un dato punto Q sul foglio.
11. Far vedere che i punti $A = (1{:}\,0{:}\,1)$, $B = (0{:}\,1{:}\,1)$, $C = (2{:}\,1{:}\,3)$ e $D = (3{:}\,-1{:}\,2)$ stanno su una retta l. Determinare i birapporti $(ABCD)$ e $(BACD)$. Determinare un punto E su l tale che il birapporto $(ABCE)$ è uguale a 3.

10. Siano A, B, C, D quattro punti sulla retta proiettiva $\mathbf{P}^1$. Sia $\lambda = (A\,B\,C\,D)$ il loro birapporto. Esprimere i birapporti $(A\,B\,C\,D)$, $(A\,B\,D\,C)$, $(C\,D\,A\,B)$, $(B\,C\,A\,D)$, $(B\,C\,D\,A)$, $(B\,A\,D\,C)$ e $(D\,C\,B\,A)$ in termini di λ.