1. Sia $S \subset \mathbf{P}^1$ l'insieme dato da $S = \{(91\colon 119), (191\colon 19), (247\colon 323)\}$. Quanti punti contiene S?
2. Siano $P = (x_0\colon x_1)$ e $Q = (y_0\colon y_1)$ due punti di $\mathbf{P}^1$. Dimostare che P e Q sono lo stesso punto se e soltanto se si ha $\det\begin{pmatrix} x_0 & y_0 \\ x_1 & y_1 \end{pmatrix} = 0$.
3. Sia $r \subset \mathbf{P}^2$ la retta di equazione $x_0 + x_1 - 4x_2 = 0$ e sia $P \in \mathbf{P}^2$ il punto $(4\colon 0\colon 1)$.
   (a) Dimostrare che la retta r passa per il punto P.
   (b) Esibire altre due punti della retta r.
   (c) Esibire altre due rette che passano per P.
4. Siano $P = (1\colon 2\colon 0)$ e $Q = (2\colon 0\colon 1)$ due punti in $\mathbf{P}^2$ e sia $r \subset \mathbf{P}^2$ la retta di equazione $x_0 - x_1 + 2x_2 = 0$.
   (a) Calcolare un'equazione per la retta s passante per P e Q.
   (b) Calcolare il punto di intersezione $r \cap s$.
5. Sia $r \subset \mathbf{P}^2$ la retta di equazione $x_0 + 2x_1 = 0$ e sia $s \subset \mathbf{P}^2$ la retta di equazione $2x_0 + x_3 = 0$. Sia $P \in \mathbf{P}^2$ il punto $(1\colon -1\colon 2)$.
   (b) Calcolare il punto Q di intersezione $r \cap s$.
   (a) Calcolare un'equazione per la retta t passante per P e Q.
6. Sia l la retta passante per $(0\colon 1\colon -1)$ e $(2\colon 1\colon 0)$ e sia m la retta passante per $(0\colon -1\colon 1)$ e $(2\colon 1\colon 0)$. Determinare $l \cap m$.
7. (a) Decidere se i tre punti $(1\colon 2\colon 3)$, $(1\colon 0\colon -1)$ e $(2\colon 1\colon 0)$ di $\mathbf{P}^2$ stanno su una retta o meno.
   (b) Decidere se le tre rette di equazioni $x_0 + 2x_1 + 3x_2 = 0$, $x_0 - x_3 = 0$ e $2x_0 + x_1 = 0$ in $\mathbf{P}^2$ passano per un punto comune.
8. (a) Dimostrare che tre punti $(p_0\colon p_1\colon p_2)$, $(q_0\colon q_1\colon q_2)$ e $(r_0\colon r_1\colon r_2)$ in $\mathbf{P}^2$ stanno su una retta se e soltanto se si ha che
$$\det\begin{pmatrix} p_0 & q_0 & r_0 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{pmatrix} = 0.$$
   (b) Dimostrare che tre rette di equazioni $a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$, $b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 = 0$ e $c_0x_0 + c_1x_1 + c_2x_2 = 0$ passano per un punto comune se e soltanto se si ha che
$$\det\begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 0.$$
9. Sia $r \subset \mathbf{P}^2$ la retta di equazione $x_0 + x_1 + x_2 = 0$ e sia $s \subset \mathbf{P}^2$ la retta di equazione $2x_0 - x_1 - x_2 = 0$. Trovare altre due rette nel fascio delle rette passanti per il punto di intersezione $P = r \cap s$.
10. Sia r la retta passante per $P = (1\colon 0\colon -1)$ e $Q = (2\colon 1\colon 0)$.
   (a) Far vedere che il punto $R = (-1\colon -1\colon -1)$ sta su r.
   (b) Determinare $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ tali che $R = \lambda P + \mu Q$.
11. Sia T il triangolo di vertici $A_0 = (1\colon 0\colon 0)$, $A_1 = (0\colon 1\colon 0)$ e $A_2 = (0\colon 0\colon 1)$. Siano a_0, a_1 e a_2 i lati corrispondenti, nel senso che a_i è il lato che *non* passa per il vertice A_i. Sia P il punto $(1\colon 1\colon 1)$.
   (a) Determinare delle equazioni per i tre lati a_0, a_1 e a_2.
   (b) Per $i = 0, 1, 2$ determinare equazioni per le rette r_i cha passano per A_i e P.
   (c) Per $i = 0, 1, 2$ determinare i punti di intersezione $Q_i = r_i \cap a_i$.
   (d) Determinare delle equazioni per i lati q_i del triangolo di vertici Q_0, Q_1, Q_2 per $i = 0, 1, 2$
   (e) Dimostrare che i punti di intersezione $a_i \cap q_i$ (per $i = 0, 1, 2$) stanno su una retta.