1. Sia S la riflessione rispetto al piano $\pi \subset \mathbf{R}^3$ di equazione $x + y = 0$.
   (a) Trovare le formule che descrivono la trasformazione S.
   (b) Determinare i punti fissi di S.
   (c) Determinare i punti $P \in \mathbf{R}^3$ per cui $S(P) = -P$.
   (d) Determinare l'immagine $S(m)$ della retta m data da $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $(t \in \mathbf{R})$.

2. Sia $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ la trasformazione data da
$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}z \\ -y \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}z \end{pmatrix}.$$
   (a) Determinare autovalori reali e corrispondenti autospazi di f.
   (b) Scrivere f come composizione di una riflessione rispetto ad un piano e una rotazione rispetto ad una retta.

3. Sia $l \subset \mathbf{R}^3$ la retta di equazione parametrica $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbf{R})$. Sia R la rotazione intorno ad l di un angolo di 90^o.
   (a) Trovare le formule che descrivono la trasformazione R.
   (b) Calcolare l'immagine $S(\pi)$ del piano π di equazione $x + y + z = 1$.
   (c) Stesse domande per la retta l di equazione parametrica $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $(t \in \mathbf{R})$.

4. Siano $a, b, c \in \mathbf{R}$ non tutti nulli e sia $d = a^2 + b^2 + c^2$. Sia $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ la trasformazione data da
$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{d}\begin{pmatrix} a^2 - b^2 - c^2 & 2ab & 2ac \\ 2ab & -a^2 + b^2 - c^2 & 2bc \\ 2ac & 2bc & -a^2 - b^2 + c^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$
   (a) Far vedere che f è ortogonale.
   (b) Determinare la dimensione dello sottospazio $\{\mathbf{v} \in \mathbf{R}^3 : f(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}\}$.
   (c) Geometricamente, cosa fa f?

5. (a) Dimostrare che la composizione di due rotazioni intorno a delle rette distinte passanti per l'origine in $\mathbf{R}^3$ è ancora una rotazione.
   (b) Dimostrare che la composizione di due riflessioni rispetto a due piani distinti passanti per l'origine di $\mathbf{R}^3$, è una rotazione intorno ad una retta. Geometricamente, che rapporto c'è fra i due piani e la retta?

6. Sia $C \subset \mathbf{R}^2$ la conica di equazione $x^2 - y^2 = 4$.
   (a) Disegnare C.
   (b) Disegnare la traslata di C di passo $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
   (c) Ruotare C intorno all'origine di un angolo di 45^o. Disegnare il risultato C'.
   (d) Ruotare C intorno al punto $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ di un angolo di 90^o. Disegnare il risultato C''.