Geometria 2. 2^o Esonero. 23 Febbraio 2005, 11:00–13:00.

COGNOME .... *NOME* ....

Inserire le risposte negli spazi predisposti, *accompagnandole con spiegazioni* chiare ed essenziali. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Ogni esercizio vale 7.5 punti.

1. Sia $r \subset \mathbf{P}^2$ la retta di equazione $x_0 + x_1 = 0$ e sia $s \subset \mathbf{P}^2$ la retta di equazione $x_1 + 2x_2 = 0$. Scegliere un punto $P \in r$. Determinare la proiezione di P di centro $S = (1\colon 1\colon 1)$ sulla retta s.

Visto che siamo liberi di scegliere $P \in r$ prendiamo come P il punto di intersezione fra r ed s e cioé $P = (2\colon -2\colon 1)$. Visto che P appartiene sia ad r che s viene mandato in se stesso da qualsiasi proiezione da r in s e quindi $\pi_S(P) = P = (2\colon -2\colon 1)$.

2. Determinare la matrice 2×2 che induce la proiettività $\mathbf{P}^1 \longrightarrow \mathbf{P}^1$ che scambia i punti $(1\colon 0)$ e $(1\colon 1)$ e manda il punto $(1\colon 4)$ nel punto $(1\colon 2)$.

Il fatto che f scambia i punti $(0\colon 1)$ e $(1\colon 1)$ vuol dire che la matrice ha la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ a & -a \end{pmatrix}$. Siccome $f(1\colon 4) = (1\colon 2)$, il vettore $\begin{pmatrix} a & b \\ a & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 4b \\ a - 4a \end{pmatrix}$ è proporzionale al vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Questo significa che $\det \begin{pmatrix} a + 4b & 1 \\ -3a & 2 \end{pmatrix} = 0$ e quindi che $2(a + 4b) + 3a = 0$. Quindi $b = -\frac{5}{8}a$ e vediamo che ogni matrice della forma $\begin{pmatrix} a & -\frac{5}{8}a \\ a & -a \end{pmatrix}$ va bene. Per esempio la matrice $\begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 8 & -8 \end{pmatrix}$.

3. Sia C la conica data da $x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 = 0$. Determinare tre carte affini (= schermi per visualizzare una parte di $\mathbf{P}^2$) nelle quali i punti finiti di C formino rispettivamente una parabola, un'ellisse ed un'iperbole.

Nella carta affine di equazione $x_0 = 1$, la parte 'visibile' della conica C ha equazione $x_1^2 - x_2^2 = 1$. Si tratta di una iperbole. Nella carta affine di equazione $x_1 = 1$ la parte 'visibile' della conica C ha equazione $x_0^2 + x_2^2 = 1$. Si tratta di un'ellisse. Nella carta affine di equazione $x_1 = x_0 + 1$ la parte 'visibile' della conica C ha equazione $x_2^2 = 2x_0 + 1$. Si tratta di una parabola.

4. Sia r la retta disegnata qui sotto e sia f la proiettività $r \longrightarrow r$ che fissa i punti A e B e manda C nel punto D. Costruire il punto $f(D)$.

I dati $f(A) = A$, $f(B) = B$ e $f(C) = D$ determinano una unica proiettività $f : r \longrightarrow r$. Per costruirla graficamente, si disegna a caso una seconda retta m passante per A. Si proiettano da un centro scelto S i punti B e C su m. Siano B' e C' le immagini di B e C. Adesso scegliamo un secondo centro di proiezione S' che ha la proprietà che f è uguale a la proiezione da r su m di centro S seguita dalla proiezione di centro S' da m su r.

Siccome A è il punto di intersezione di r e m, avremo automaticamente che $f(A) = A$. Per avere $f(B) = B$, è necessario che il punto S' stia sulla retta $\overline{B'B}$. Per avere $f(C) = D$, è necessario che il punto S' stia sulla retta $\overline{C'D}$. Quindi non abbiamo scelta: il punto S' è per forza il punto di intersezione delle due rette $\overline{B'B}$ e $\overline{C'D}$.

Adesso possiamo disegnare il punto $f(D)$. Sia D' la proiezione di centro S di D sulla retta m. In altre parole, abbiamo che $D' = m \cap \overline{DS}$. Allora $f(D)$ è il punto di intersezione della retta $\overline{D'S'}$ e la retta r.