

1. Calcolare gli autovalori $\lambda \in \mathbf{R}$ delle seguenti matrici. Determinare gli autospazi corrispondenti.

(i)

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$$

(iii)

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

(ii)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(iv)

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Calcolare gli autovalori $\lambda \in \mathbf{R}$ delle seguenti matrici. Determinare gli autospazi corrispondenti.

(i)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(iii)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

(ii)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(iv)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

3. Sia $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ l'applicazione data da $f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Decidere se f è diagonalizzabile o meno.

4. (i) Calcolare

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^{100}.$$

- (ii) Calcolare

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}^{100}.$$

5. Sia A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(i) A è diagonalizzabile?

(ii) Trovare la formula generale per A^n . (Sugg. provare $n = 1, 2, 3, \dots$)

6. Calcolare

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Sia V uno spazio vettoriale e sia $f : V \longrightarrow V$ un'applicazione lineare. Dimostrare

(i) Il nucleo di f è autospazio di f . Per quale autovalore?

(ii) I vettori fissati da f formano un'autospazio di f . Per quale autovalore?