COGNOME .... *NOME* ....

Inserire le risposte negli spazi predisposti, *accompagnandole con spiegazioni* chiare ed essenziali. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Ogni esercizio vale 7.5 punti.

1. Sia $\pi \subset \mathbf{R}^3$ il piano di equazione $x + y = 1$. Sia $P = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$. Calcolare le coordinate del punto P riflesso rispetto al piano π.

La retta l di equazione $\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(t \in \mathbf{R})$ passa per il punto P ed è ortognale a π. Il valore del parametro t nel punto di intersezione di l con π soddisfa $(p+t)+(q+t) = 1$ e quindi $t = (1-p-q)/2$. Il valore del parametro nel punto riflesso Q è due volte questo. Dunque $Q = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} + (1-p-q) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-q \\ 1-p \\ r \end{pmatrix}$

2. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 1/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

e sia $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'applicazione data dalla moltiplicazione per A.

(a) Dimostare che A è una matrice ortogonale.
(b) Determinare i punti fissi di f.
(c) Determinare autovalori e autospazi di f.

(a) Si verifica che il prodotto di A per la sua trasposta è uguale alla matrice identità. In altre parole, le tre colonne hanno lunghezza 1 (perché $(-\frac{2}{3})^2 + (-\frac{2}{3})^2 + \frac{1}{3}^2 = 1$) e sono ortogonali fra loro (perché $(-\frac{2}{3})(-\frac{2}{3}) - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = 0$).
(b) I punti fissi di f sono i vettori $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$ per cui vale $f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$. In altre parole, i punti fiss di f formano l'autospazio di f di autovalore $\lambda = 1$. Determiniamo questo autospazio nella parte (c).
(c) Siccome la matrice è ortogonale, gli autovalori λ reali sono necessariamente uguali a ± 1. Per $\lambda = 1$, ogni riga della matrice $A - \lambda \cdot \mathrm{id}$ è uguale a $(-\frac{2}{3} \ -\frac{2}{3} \ -\frac{2}{3})$. Questo significa che l'autospazio di f di autovalore $\lambda = 1$ è uguale al piano di equazione $-\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z = 0$.

Per $\lambda = -1$ abbiamo che

$$A - \lambda \cdot \mathrm{id} \quad = \quad \begin{pmatrix} 4/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & 4/3 & -2/3 \\ -2/3 & -2/3 & 4/3 \end{pmatrix}.$$

Usando i metodi del corso di Geometria I, si risolve il sistema omogeno corrispondente a questa matrice. L'autospazio di autovalore $\lambda = -1$ è uguale allo spazio delle soluzioni del sistema e coincide con lo span del vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Siano dati i punti $P = (1{:}\,0)$, $Q = (1{:}\,1)$ e $R = (1{:}\,2)$ in $\mathbf{P}^2$. Calcolare una matrice 2×2 che induce la proiettività $f : \mathbf{P}^1 \longrightarrow \mathbf{P}^1$ determinata da $f(P) = Q$, $f(Q) = R$ e $f(R) = P$.

La matrice cercata A ha la proprietà che $A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda\\\lambda\end{pmatrix}$ e che $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mu\\2\mu\end{pmatrix}$ per certi $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ non nulli. Questo implica che

$$A = \begin{pmatrix}\lambda & \mu-\lambda\\ \lambda & 2\mu-\lambda\end{pmatrix}.$$

Il fatto che $A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\mu-\lambda\\4\mu-\lambda\end{pmatrix}$ è proporzionale al vettore $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, vuol dire che $4\mu - \lambda = 0$ e quindi che $\lambda = 4\mu$. Per μ possiamo scegliere un qualsiasi valore non nullo. Prendendo $\mu = 1$, troviamo che

$$A = \begin{pmatrix}4 & -3\\ 4 & -2\end{pmatrix}.$$

4. Le due rette disegnate qui sotto si intersecano in un punto Q che sta fuori del foglio. Costruire la retta che passa per Q e per il punto dato P.

Nel disegno ci sono due rette s e r e un punto P.

Prima si disegnano a caso due rette l, m che passano per P. Sia B il punto di intersezione $m \cap r$ e sia B' il punto di intersezione $l \cap s$. Poi si disegna la retta q che passa per B e B' e si sceglie un punto S su $\overline{BB'} = q$. Poi si disegna, a caso, una retta n che passa per S. Siano $C = n \cap m$ e $C' = n \cap l$. Abbiamo quindi $n = \overline{CC'}$. Finalmente si sceglie un punto A sulla retta r e si disegna la retta p che passa per A ed S. Sia A' il punto di intersezione $p \cap s$. Abbiamo quindi $p = \overline{AA'}$

Adesso abbiamo una configurazione di Desargues. Abbiamo due triangoli ABC e $A'B'C'$ e le tre rette $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ e $\overline{CC'}$ passano per S. Sappiamo quindi che i punti di intersezione $P = \overline{BC} \cap \overline{B'C'}$, $Q = s \cap r = \overline{AB} \cap \overline{A'B'}$ e $R = \overline{AC} \cap \overline{A'C'}$ stanno su una retta. Questa è la retta cercata. Possiamo disegnarla, collegando i punti P e $R = \overline{AC} \cap \overline{A'C'}$.