COGNOME .... *NOME* ....

Inserire le risposte negli spazi predisposti, *accompagnandole con spiegazioni* chiare ed essenziali. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Ogni esercizio vale 7.5 punti.

1. Sia l la retta di equazione parametrica $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(t \in \mathbf{R})$. Sia π il piano di equazione $-x+y+z=2$. Ruotare il piano π intorno alla retta l di angolo di 90 gradi e determinare un'equazione parametrica dell'imagine di π.

Siccome la retta l passa per l'origine, la rotazione R intorna a l è un'applicazione lineare. Rispetto alla base ortogonale $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$, la matrice rappresentativa di R è la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Siccome la matrice del cambiamento di base è la matrice ortogonale $B = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$, la matrice rappresentativa di R rispetto alla base canonica è uguale a

$$M = B \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} B^t = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/2 & -1/\sqrt{2} & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Un'equazione parametrica per π è data da $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $(t, s \in \mathbf{R})$. Per trovare l'immagine di π, moltiplichiamo per la matrice M. Il risultato è

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}, \qquad (s, t, \in \mathbf{R}).$$

2. Determinare la matrice 2×2 che induce la proiettività $\mathbf{P}^1 \longrightarrow \mathbf{P}^1$ che scambia i punti $(1{:}\,0)$ e $(1{:}\,1)$ e manda il punto $(1{:}\,4)$ nel punto $(1{:}\,2)$.

Il fatto che f scambia i punti $(0{:}\,1)$ e $(1{:}\,1)$ vuol dire che la matrice ha la forma $\begin{pmatrix} a & b \\ a & -a \end{pmatrix}$. Siccome $f(1{:}\,4) = (1{:}\,2)$, il vettore $\begin{pmatrix} a & b \\ a & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+4b \\ a-4a \end{pmatrix}$ è proporzionale al vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Questo significa che $\det \begin{pmatrix} a+4b & 1 \\ -3a & 2 \end{pmatrix} = 0$ e quindi che $2(a+4b)+3a = 0$. Quindi $b = -\frac{5}{8}a$ e vediamo che ogni matrice della forma $\begin{pmatrix} a & -\frac{5}{8}a \\ a & -a \end{pmatrix}$ va bene. Per esempio la matrice $\begin{pmatrix} 8 & -5 \\ 8 & -8 \end{pmatrix}$.

3. Sia $Q \subset \mathbf{R}^3$ la quadrica di equazione $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - 2yz + 2x + 2y - 2z = 0$ (oppure $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - 2yz + 2x + 2y - 2z + 1 = 0$). Determinare di che tipo di quadrica si tratta

Nella versione con termine noto non nullo abbiamo che

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - 2yz + 2x + 2y - 2z + 1 = (x + y - z + 1)^2.$$

Si tratta quindi del piano (doppio) di equazione $x + y - z + 1 = 0$. Nella versione con termine noto nullo abbiamo che

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - 2yz + 2x + 2y - 2z = (x + y - z + 1)^2 - 1 = (x + y - z)(x + y - z + 2).$$

Si tratta quindi dei due piani paralleli di equazione $x + y - z = 0$ e $x + y - z + 2 = 0$.

4. Sia r la retta disegnata qui sotto e sia f la proiettività $r \longrightarrow r$ che fissa i punti A e B e manda C nel punto D. Costruire il punto $f(D)$.

I dati $f(A) = A$, $f(B) = B$ e $f(C) = D$ determinano una unica proiettività $f : r \longrightarrow r$. Per costruirla graficamente, si disegna a caso una seconda retta m passante per A. Si proiettano da un centro scelto S i punti B e C su m. Siano B' e C' le immagini di B e C. Adesso scegliamo un secondo centro di proiezione S' che ha la proprietà che f è uguale a la proiezione da r su m di centro S seguita dalla proiezione di centro S' da m su r.

Siccome A è il punto di intersezione di r e m, avremo automaticamente che $f(A) = A$. Per avere $f(B) = B$, è necessario che il punto S' stia sulla retta $\overline{B'B}$. Per avere $f(C) = D$, è necessario che il punto S' stia sulla retta $\overline{C'D}$. Quindi non abbiamo scelta: il punto S' è per forza il punto di intersezione delle due rette $\overline{B'B}$ e $\overline{C'D}$.

Adesso possiamo disegnare il punto $f(D)$. Sia D' la proiezione di centro S di D sulla retta m. In altre parole, abbiamo che $D' = m \cap \overline{DS}$. Allora $f(D)$ è il punto di intersezione della retta $\overline{D'S'}$ e la retta r.