COGNOME .... *NOME* ....

Inserire le risposte negli spazi predisposti, *accompagnandole con spiegazioni* chiare ed essenziali. NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI. Ogni esercizio vale 7.5 punti.

1. Siano $A, B, C \in \mathbf{R}^2$ i tre punti dati da $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 21 \\ 9 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \end{pmatrix}$. Calcolare l'area del triangolo ABC.

Trasliamo il punto A nell'origine tramite una traslazione di passo $-A = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. In questo modo portiamo i punti A, B e C in $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 21 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 7 \end{pmatrix}$ e $Q = \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}$ rispettivamente. L'area del triangolo ABC è uguale a quella del triangolo OPQ ed è uguale a

$$\frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}\right| = \frac{|20 \cdot 3 - 10 \cdot 7|}{2} = \frac{10}{2} = 5.$$

2. Sia π il piano di equazione $x + z = 0$ e sia $S : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ la riflessione rispetto al piano π. Sia r la retta di equazione parametrica $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $(t \in \mathbf{R})$. Calcolare un'equazione parametrica della retta r riflessa $S(r)$.

La retta m passante per un punto generico $P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ e perpendicolare al piano π, ha equazione parametrica $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(t \in \mathbf{R})$. Intersecandola con il piano π otteniamo $(p_1 + t) + (p_3 + t) = 0$ e quindi $2t = -p_1 - p_3$. Ricordiamo che $2t$ è il valore del parametro a cui corrisponde $S(P)$. Sostituendolo nell'equazione di m per ottenere $S(P)$, troviamo $S(P) = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} - (p_1 + p_3)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p_3 \\ p_2 \\ -p_1 \end{pmatrix}$. Applicando ora la formula ottenuta per $S(P)$ ai due punti $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ della retta r, otteniamo $S(Q) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $S(T) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. La retta cercata $S(r)$ è quella che passa per $S(Q)$ ed $S(T)$ e quindi una sua equazione parametrica è data da $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $(t \in \mathbf{R})$.

3. Sia C la conica di equazione $6x^2+4xy+3y^2=1$. Determinare una matrice ortogonale B tale che il cambiamento di variabili $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ porti l'equazione nella forma 'diagonale' $ax'^2 + by'^2 = 1$.

La matrice simmetrica associata alla conica è $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. La teoria sulla diagonalizzazione delle matrici simmetriche afferma che ogni matrice B le cui colonne formano una base ortonormale di autovettori di A, ha le proprietà richieste. Basta quindi calcolare una base ortonormale di autovettori di A. Prima calcoliamo gli autovalori di A, che sono le radici del polinomio

$$\det \begin{pmatrix} 6-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (6-\lambda)(3-\lambda)-4 = \lambda^2 - 9\lambda + 14 = (\lambda-7)(\lambda-2) = 0,$$

e quindi risultano $\lambda = 7$ e $\lambda = 2$.

L'autospazio di autovalore $\lambda = 7$ è dato dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo $\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{array}\right)$ ed è quindi uguale allo span di $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. La prima colonna di B è uguale a questo vettore diviso per la sua lunghezza $\sqrt{5}$. Similmente, l'autospazio di autovalore $\lambda = 7$ è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo $\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$ ed è quindi uguale allo span del vettore $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. La seconda colonna di B è uguale a questo vettore diviso per la sua lunghezza $\sqrt{5}$. Abbiamo quindi che $B = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$.

4. Sia $Q \subset \mathbf{R}^3$ la quadrica di equazione $x^2+y^2+2xy+x+z=1$. Spiegare di che tipo di quadrica si tratta.

La matrice simmetrica associata alla quadrica è $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Gli autovalori di A soddisfano l'equazione $\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda((1-\lambda)^2-1) = 0$. Quindi sono dati da $\lambda = 0$ (doppio) e $\lambda = 2$. L'autospazio di autovalore 2 è uguale a $\mathrm{Span}(\mathbf{v}_1)$ dove $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. L'autospazio di autovalore 0 è il piano di equazione $x+y=0$. Una base ortogonale è data dai vettori $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dividendo i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ per le loro lunghezze otteniamo una base ortonormale di autovettori. Gli autovettori formano le colonne della matrice del cambiamento di variabili che porta la quadrica 'in forma diagonale'. Abbiamo che

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Facendo la sosituzione, troviamo l'equazione $2x'^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y') + z' - 1 = 0$. Se mettiamo $x'' = x' + \frac{1}{4\sqrt{2}}$ e $y'' = \frac{1}{\sqrt{2}}y' + z' - 1 - \frac{1}{32}$. troviamo l'equazione $x''^2 + y'' = 0$. Questo è un cilindro parabolico.