1. Siano A, B, C, D quattro punti di $\mathbf{P}^2$ in posizione generale. Sia l la retta passante per A e B, sia m la retta passante per C e D e sia n una retta passante per $l \cap m$ che è diversa da l e m. Disegnare la configurazione di questi cinque punti e tre rette. Disegnare la configurazione duale.

2. Siano A, B, C, D quattro punti distinti su una retta l di $\mathbf{P}^2$. Far vedere che i birapporti $(A\,B\,C\,D)$, $(B\,A\,D\,C)$, $(D\,C\,B\,A)$ e $(C\,D\,A\,B)$ sono tutti uguali.

3. Disegnare in prospettività un pavimento di due per tre piastrelle rettangolari. (Le piastrelle hanno la stessa misura).

4. (Costruzione degli alberi equidistanti) Sia h (l'orizzonte) una retta in $\mathbf{P}^2$. Siano s e d (i lati della strada) due rette che intersecano h nello stesso punto Y. Siano a e b due rette che intersecano h nello stesso punto X di h. Supponiamo che $X \neq Y$. Siano $A = a \cap s$ e $B = b \cap s$ "gli alberi". Siano $A' = a \cap d$ e $B' = b \cap d$.
   (a) Disegnare la retta m che passa per Y e il punto di intersezione di $\overline{AB'}$ e $\overline{A'B}$. Sia N il punto di intersezione di m e b.
   (b) Disegnare C (l'albero equidistante) il punto di intersezione di $\overline{A'N}$ e s. Disegnare C' il punto di intersezione di $\overline{AN}$ e d.
   (c) Dimostrare che X, C e C' stanno su una retta (Sugg. Utilizzare l'inverso del Teorema di Desargues)

5. Siano a, b, c, d quattro rette distinte che passano per un punto P di $\mathbf{P}^2$. Definiamo il *birapporto* $(a\,b\,c\,d)$ delle rette come segue: sia m una retta arbitraria e siano A, B, C, D i punti di intersezione di m con a, b, c, d. Allora poniamo $(a\,b\,c\,d) = (A\,B\,C\,D)$. Dimostrare che questa definizione non dipende dalla scelta della retta m.

6. Sia l una retta in $\mathbf{P}^2$. Far vedere che nessuna involuzione $\varphi : l \longrightarrow l$ ha esattamente 1 punto fisso.

7. Sia l una retta proiettiva e sia $f : l \longrightarrow l$ un'involuzione che ha punti fissi.
   (a) Far vedere che f ha due punti fissi.
   (b) Costruire una involuzione con due punti fissi.
   (c) Siano A e B i punti fissati da f. Dimostrare che per ogni punto $C \in l$ il birapporto $(A\,B\,C\,f(C))$ è ugual a -1.

8. Sia l una retta proiettiva e siano P, Q, R tre punti distinti di l. Costruire una proiettività $f : l \longrightarrow l$ per cui $f(Q) = R$ e che ammette P come unico punto fisso. Far vedere che c'è una proiettività sola con queste proprietà.

9. Siano P e Q due punti distinti su una retta l.
   (a) Costruire due involuzioni diversi di l che fissano P e Q.
   (b) Dimostrare che ogni due involuzioni φ_1, φ_2 di l che fissano P e Q, soddisfano $\varphi_1\varphi_2 = \varphi_2\varphi_1$.

10. Dimostrare che per ogni $n = 1, 2, 3 \ldots$ esiste una proiettività $f : \mathbf{P}^1 \longrightarrow \mathbf{P}^1$ tale che f^n è l'identità mentre f^k non è l'identità per nessun numero naturale $k \leq n - 1$. (Cioè f^k è la proiettività che consiste nel applicare f esattamente k volte)